

БАКАЛАВРИАТ

Р.Ш. Хуснутдинов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНИК



Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – БАКАЛАВРИАТ

серия основана в 1996 г.



Р.Ш. ХУСНУТДИНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНИК

*Рекомендовано в качестве учебного
пособия по направлениям
080100 «Экономика» и 080200 «Менеджмент»*

Москва
ИНФРА-М
2013

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
X98

Рецензенты:

Ф.Г. Мухлисов, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета;
И.П. Семенов, профессор кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета

X98 Хуснутдинов Р.Ш.
Теория вероятностей: Учебник. — М.: ИНФРА-М, 2013. — 175 с. —
(Высшее образование: Бакалавриат).
ISBN 978-5-16-005312-7

Учебное пособие написано в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования и содержит весь материал по курсу теории вероятностей.

Для студентов вузов и лиц, использующих вероятностные методы при решении практических задач.

ББК 22.171я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателям книга написана на основе лекций, прочитанных автором в течение последних лет студентам Казанского государственного технологического университета (КГТУ) и полностью соответствует новым Государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования по указанной математической дисциплине.

Книга посвящена полному и систематическому изложению курса теории вероятностей и состоит из 13 разделов. Каждый раздел завершается приведением задач и упражнений, рекомендованных для самостоятельной работы.

Первый раздел носит вспомогательный характер, и здесь приведены основные сведения из теории множеств и теории функций, которые в дальнейшем используются для аксиоматического построения вероятностных пространств.

Второй раздел является основным. Здесь проводится аксиоматическое построение вероятностного пространства, где вероятность определяется как положительная аддитивная функция, заданная на пространстве элементарных исходов (событий). Вводятся основные вероятностные понятия, изучаются их свойства и формулируются и доказываются основные теоремы.

Третий раздел посвящен изложению теории независимых и зависимых испытаний. Подробно изучена биномиальная схема Бернулли; в частности, для нее получены асимптотические формулы.

В *четвертом разделе* излагается теория дискретных случайных величин и их числовых характеристик. Здесь случайная величина определяется как функция, заданная на некотором вероятностном пространстве.

Изложению закона больших чисел посвящен *пятый раздел*. Здесь приведены и доказаны основные теоремы: теорема Чебышева и Ляпунова — и выяснен их вероятностный смысл.

В следующих пяти разделах (*6–10 разделы*) излагается теория непрерывных случайных величин. Вводятся их числовые характеристики и устанавливаются формулы для их вычисления. Подробно изучены случайные величины, распределенные равномерно, нормально, а также величины, имеющие показательный закон распределения.

В *одиннадцатом и двенадцатом разделах* изучаются многомерные случайные величины. Устанавливаются условия их зависимости и независимости, а также подробно рассматривается вопрос об их линейной и нелинейной корреляционной зависимости.

Тринадцатый раздел посвящен изложению центральной теоремы Ляпунова. Приведены и доказаны следствия из этой теоремы, которые имеют широкое приложение при решении различных вероятностных задач.

Для облегчения усвоения изложенного материала многие теоретические выкладки сопровождаются решением типовых задач (при изложении курса приведено и решено 86 таких типовых задач). В книге для краткости изложения используется общепринятая математическая символика. Нумерация разделов в книге — сквозная, а для формул, теорем, определений и т. д. — по разделам. Например, запись «Теорема 1.5» обозначает, что это пятая теорема из первого раздела.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам — заведующему кафедрой математического анализа КГПУ, профессору Ф.Г. Мухлисову и декану автодорожного факультета КАСА, профессору И.П. Семёнову, внимательно прочитавшим рукопись книги и сделавшим ряд ценных советов и замечаний, которые были учтены автором при окончательном редактировании книги.

Автор также глубоко признателен директору Бугульминского филиала КГТУ, профессору А.В. Ефремову, вдохновившему автора к написанию этой книги: без его моральной и материальной поддержки эта книга едва ли увидела бы свет.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Определение 1.1. *Множеством* называется совокупность некоторых объектов, объединенных по некоторому признаку.

Например, можно говорить о множестве всех решений некоторого уравнения, множестве студентов в аудитории, множестве всех целых положительных чисел и т.д.

Объекты, которые составляют данное множество, называются *элементами множества*. Множества обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, а их элементы — строчными: $a, b, c, \dots, x, y, z$. Запись $a \in A$ обозначает, что a принадлежит множеству A , и наоборот: $b \notin A$ (или $b \in A$) — b не принадлежит множеству A . Если множество не содержит ни одного элемента, то это множество называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$.

Пусть заданы множества A и B .

Определение 1.2. Если элементы множества B одновременно принадлежат и множеству A , то B называется *подмножеством* множества A . Этот факт записывается следующим образом: $B \subset A$ и читается «множество B входит (включается) во множество A ». Если эти множества отличаются хотя бы одним элементом, то говорят, что B составляет правильную часть множества A . Одновременное выполнение включений $B \subset A$ и $A \subset B$ означает равенство этих множеств: $A = B$, т.е.

$$\begin{cases} B \subset A \\ A \subset B \end{cases} \Leftrightarrow A = B. \quad (1.1)$$

Условие (1.1) обычно используют для установления равенства двух множеств.

Для множеств можно ввести операции, аналогичные операциям, совершаемым над арифметическими числами.

Определение 1.3. Под *суммой (объединением)* множеств A и B (обозначение: $A \cup B$ или $A + B$) понимают множество, состоящее из элементов этих множеств, т.е.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример 1.1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. Тогда $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример 1.2. Пусть $C = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2n\}$ и $D = \{1, 3, 5, \dots\} = \{2n-1\}$ — два множества соответственно четных и нечетных положительных чисел. Тогда их суммой будет множество всех натуральных чисел:

$$C \cup D = \{2n\} \cup \{2n-1\} = \{1, 2, 3, \dots\} = N.$$

Пример 1.3. Пусть $E = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ и $F = \{0, 1, 3\}$. Нетрудно заметить, что $F \subset E$ и $E \cup F = \{-1, 0, 1, 3, 5\} = E$.

Определение 1.4. Под *произведением (пересечением)* множеств A и B (обозначение: $A \cap B$ или AB) понимают множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно обоим этим множествам, т.е.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Найдем произведения множеств, рассмотренных в примерах 1.1, 1.2, 1.3:

$$A \cap B = \{2, 3\}; C \cap D = \emptyset; E \cap F = F.$$

Аналогично рассматриваются сумма и произведение любого числа (конечного или бесконечного) множеств.

Определение 1.5. Под *разностью* множеств A и B (обозначение: $A \setminus B$) понимают множество, состоящее из элементов A , не принадлежащих множеству B , т.е.

$$A \setminus B = \{x: x \in A, \Rightarrow x \notin B\}.$$

Для множеств, рассмотренных в примерах 1.1–1.3:

$$A \setminus B = \{1, 7, 8\}; C \setminus D = \{2n\}; E \setminus F = \{-1, 5\}.$$

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A и обозначается $C_A B$, т.е.

$$A \setminus B = C_A B.$$

Чтобы дать геометрическую интерпретацию введенных операций над множествами, рассмотрим точечные множества, расположенные на плоскости (рис. 1.1).

На рис. 1.1 слева рассмотрены два круговых точечных множества A и B на плоскости: первый круг A заштрихован горизонтально, второй круг B — вертикально. Их сумма, произведение и разность представлены на том же рисунке справа и заштрихованы наклонно.

Пример 1.4. Доказать, что $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

|| Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$. Следовательно, $x \notin A \setminus B$. Так как $x \in A$, то $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Итак,

$$A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B).$$

Пусть теперь $x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow x \in A$, но $x \notin A \setminus B \Rightarrow x \in B$. Так как $x \in A$ и $x \in B$, то $x \in A \cap B$. Следовательно,

$$A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B.$$

Полученные два противоположных включения доказывают равенство рассматриваемых множеств. $\parallel$

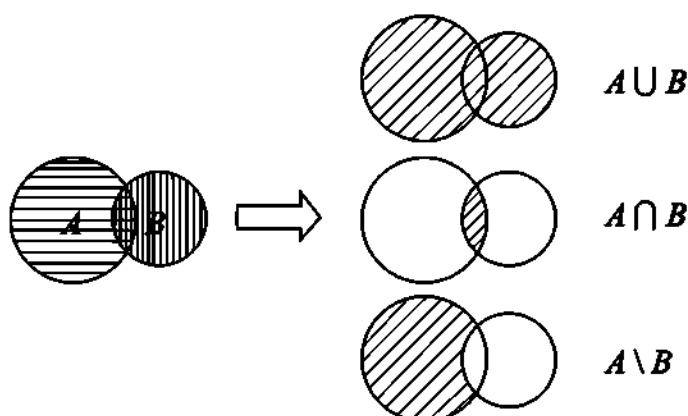


Рис. 1.1

Пример 1.5. Справедлив принцип двойственности в теории множеств:

$$\text{а) } C\left(\bigcap_n A_n\right) = \bigcup_n C A_n; \quad \text{б) } C\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcap_n C A_n,$$

т.е.: а) дополнение произведения множеств равно сумме их дополнений; б) дополнение суммы множеств равно произведению их дополнений.

$\parallel$ Для определенности докажем равенство множеств, рассматриваемых в пункте а). Справедливость утверждения в пункте б) проверяется аналогично.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } x \in C\left(\bigcap_n A_n\right) &\Rightarrow x \notin \bigcap_n A_n \Rightarrow \exists n=k, \text{ что } x \notin A_k \Rightarrow x \in C A_k \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_n C A_n, \text{ т.е. } C\left(\bigcap_n A_n\right) \subset \bigcup_n C A_n. \end{aligned}$$

Пусть теперь, наоборот, $x \in \bigcup_n C A_n$. Следовательно, $\exists n=k$, что $x \in C A_k \Rightarrow x \notin A_k \Rightarrow x \notin \bigcap_n A_n \Rightarrow x \in C\left(\bigcap_n A_n\right)$. Следовательно, $\bigcup_n C A_n \subset C\left(\bigcap_n A_n\right)$. Из взаимно противоположных включений следует равенство рассматриваемых множеств:

$$C\left(\bigcap_n A_n\right) = \bigcup_n C A_n. \quad \parallel$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. Если множества A_n ($n = \overline{1, \infty}$) образуют убывающую последовательность: $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ — и их пересечение пусто, т.е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}),$$

где слагаемые в правой части не пересекаются.

▮ То, что слагаемые в правой части не пересекаются и правая часть включается в A_1 , очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $x \in A_1$. Так как пересечение рассматриваемых множеств пусто, то существует наибольший номер n , например $n = k$, что $x \in A_k$, но $x \notin A_{k+1}$. Следовательно, $x \in A_k \setminus A_{k+1} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$, и обратное включение доказано. ▮

Теорема 1.2. Пусть задана последовательность A_n ($n = \overline{1, \infty}$) попарно непересекающихся множеств и $B_m = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n$. Тогда $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \emptyset$ и множества B_m образуют убывающую последовательность.

▮ Предположим, вопреки доказываемому, что пересечение $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ не пусто, т.е. $\exists x \in B_m$ для $\forall m$. В частности, $x \in B_1$. Следовательно, $\exists$ номер $n = k \geq 2$, что $x \in A_k$. Так как $x \notin A_n$ при $n > k$, то $x \notin B_m = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n$ при $m \geq k$, что противоречит сделанному предположению. ▮

Теорема 1.3. Если множества A_n ($n = \overline{1, \infty}$) образуют возрастающую последовательность и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \dots,$$

где слагаемые справа не пересекаются.

▮ Так как правая часть содержится в левой, то проверяем только обратное включение.

Пусть $x \in A$. Тогда существует наименьший номер n , например $n = n_0$, при котором $x \in A_{n_0}$, но $x \notin A_{n_0-1}$. Следовательно, $x \in A_{n_0} \setminus A_{n_0-1}$, т.е. этот элемент принадлежит правой части доказываемого равенства. Если $n_0 = 1$, то $x \in A_1$. ▮

1.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА. СЧЕТНЫЕ И НЕСЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Если множества конечные, то, подсчитав число элементов в каждом из них, мы можем сравнить эти множества, т.е. определить, в каком из них элементов больше или меньше. Этот подход совершенно неприемлем для бесконечных множеств. Для их сравнения вводится понятие эквивалентности множеств.

Определение 1.6. Два множества A и B называются *эквивалентными* (имеющими одну и ту же мощность, обозначение: $A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие

$$A \ni a \leftrightarrow b \in B.$$

Очевидно, все конечные множества, состоящие из одинакового количества элементов, эквивалентны между собой и за мощность таких множеств принимают число их элементов. В частности, мощность множества $A\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ (обозначение: $n(A)$) равна m , т.е. $n(A) = m$. Мощность пустого множества равна нулю: $n(\emptyset) = 0$.

В математике важную роль играют множества, эквивалентные множеству натуральных чисел, т.е. множеству $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Такие множества называются *счетными*, и их мощности приписывается число a , т.е. $n(N) = a$. Справедливо следующее очевидное утверждение, выражающее необходимое и достаточное условие счетности множеств.

Теорема 1.4. Для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его элементы можно было перенумеровать, т.е. $A\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

Из бесконечных множеств, оказывается, самыми «бедными» являются счетные множества. В этом убеждает следующая теорема.

Теорема 1.5. Из любого бесконечного множества A можно выделить его счетную правильную часть $B = \{a_1, a_2, \dots\} \subset A$.

Из множества A выберем некоторый элемент a_1 . Так как множество $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, из него аналогичным образом выберем элемент a_2 . Затем выберем элемент a_3 из множества $A \setminus \{a_1, a_2\}$. На n -м шаге выберем элемент a_n из множества $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Ясно, что, продолжая этот процесс бесконечно, мы построим требуемое счетное множество $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subset A$. $\parallel$

Существуют *несчетные* множества, т.е. бесконечные множества, не эквивалентные множеству натуральных чисел. В частности, справедлива следующая важная теорема.

Теорема 1.6. Сегмент $[0,1]$ несчетен, и все сегменты (ограниченные или неограниченные) эквивалентны между собой.

Вопреки доказываемому, предположим, что сегмент $\Delta = [0,1]$ счетен. Тогда согласно теореме 1.4 его элементы можно перенумеровать: $[1,0] = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Далее, разделим сегмент $[0,1]$ на три равные части: $\Delta_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\Delta_{12} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $\Delta_{13} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Число a_1 не принадлежит хотя бы одной из них. Обозначим ее через Δ_1 . Следовательно, $a_1 \notin \Delta_1$ и $mes(\Delta_1) = \frac{1}{3}$. А теперь уже сегмент Δ_1 разбиваем на три равные части: $\Delta_1 = \Delta_{21} \cup \Delta_{22} \cup \Delta_{23}$. Одной из них не принадлежит a_2 . Обозначим ее через Δ_2 . По условию $a_2 \notin \Delta_2$ и $mes(\Delta_2) = \frac{1}{9}$. На n -м шаге построим сегмент Δ_n с длиной $mes(\Delta_n) = \frac{1}{3^n}$, не содержащий a_n . Продолжая этот процесс бесконечно, построим последовательность вложенных друг в друга сегментов

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots,$$

длины которых $mes(\Delta_n) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. По лемме о вложенных сегментах [3] они имеют общую точку $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Точка ξ , будучи точкой сегмента Δ , совпадает с одной из a_k , например $\xi = a_n$. Так как $\xi = a_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, то $a_n \in \Delta_n$. Но по построению $a_n \notin \Delta_n$. Получили противоречие, которое показывает ошибочность нашего исходного предположения. Следовательно, сегмент Δ несчетен.

Для доказательства второй части теоремы сначала рассмотрим ограниченные сегменты, например сегменты $B = [\alpha, \beta]$ и $A = [a, b]$. Нетрудно проверить, что функция $y = a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками этих сегментов. Здесь x и y — соответствующие точки сегментов B и A . Причем при $x = \alpha \in B$ получаем точку $y = a \in A$, а при $x = \beta \in B$ — точку $y = b \in A$. Если теперь x , монотонно возрастаая, пробегает сегмент $B = [\alpha, \beta]$, то вышеуказанная функция как непрерывно возрастающая функция принимает все свои значения от a до b .

На рис. 1.2 приведено геометрическое решение этой задачи. Здесь эквивалентными точками будут точки пересечения лучей, проведенных из точки O , с сегментами $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$:

$$\alpha \leftrightarrow a; \beta \leftrightarrow b; x \leftrightarrow y.$$

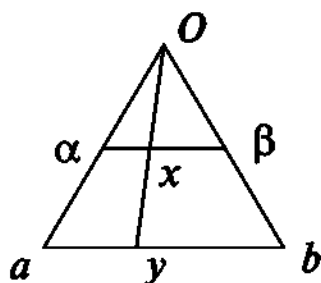


Рис. 1.2

Аналогично можно показать эквивалентность ограниченных и неограниченных отрезков. Например, функция

$$y = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-a) \right)$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между интервалами (a, b) и $R = (-\infty, \infty)$. $\square$

Мощность сегмента обозначается через c . В частности, $n([0, 1]) = c$. Часто говорят, что сегмент имеет мощность континуума.

Для конечных множеств справедлива следующая теорема о сложении мощностей.

Теорема 1.7. Пусть задана конечная совокупность конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_k$ с мощностями $n(A_i) = n_i$, $i = \overline{1, k}$. Если эти множества попарно не пересекаются, то мощность их объединения равна сумме мощностей каждого множества, т.е.

$$n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k n(A_i) = \sum_{i=1}^k n_i.$$

$\square$ Так как множества A_i , $i = \overline{1, k}$ попарно не пересекаются, то их объединение $\bigcup_{i=1}^k A_i$ содержит

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k)$$

элементов, т.е.

$$n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k n(A_i),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Эта теорема выражает аддитивное свойство мощностей конечных множеств.

Пример 1.6. Пусть заданы множества $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ и $C = \{9, 11\}$. Найти мощность их объединения.

|| Так как эти множества попарно не пересекаются, то

$$n(A \cup B \cup C) = n(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}) = 9 =$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) = 4 + 3 + 2 = 9. \quad \square$$

Следствие. Пусть заданы конечные множества A и B , пересечение которых не обязательно пусто. Тогда справедлива следующая формула для вычисления мощности объединения этих множеств:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Пример 1.7. Пусть заданы множества $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1, 2, 5\}$. Найти мощность их объединения.

|| $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 5\}$. Следовательно, $n(A \cup B) = 6$. $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ и $n(A \cap B) = 3$. Так как $n(A) = 5$, а $n(B) = 4$, то $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 4 - 3 = 6 = n(A \cup B)$. $\square$

1.3. ДЕКАРТОВО (ПРЯМОЕ) ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ И ЕГО МОЩНОСТЬ

Пусть заданы два множества $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$.

Определение 1.7. Множество всех упорядоченных пар вида (a, b) , где $a \in A$, а $b \in B$, называется *декартовым (прямым) произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$.

По аналогии определяется декартово произведение трех и более множеств.

Пример 1.8. Найти декартово произведение конечных множеств: 1) $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{7, 8\}$; 2) A, B и $C = \{a, b, c\}$.

|| 1) Декартово произведение $A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{7, 8\}$ составляют следующие упорядоченные пары:

$$A \times B = \{(1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 8), (3, 7), (3, 8)\}.$$

Их число равно $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 2 = 6$.

2) Чтобы получить декартово произведение уже трех множеств, достаточно к построенным в пункте 1) парам последовательно приписать элементы третьего множества:

$$\begin{aligned} A \times B \times C = & \{(1, 7, a), (1, 7, b), (1, 7, c), (1, 8, a), (1, 8, b), (1, 8, c), \\ & (2, 7, a), (2, 7, b), (2, 7, c), (2, 8, a), (2, 8, b), (2, 8, c), \\ & (3, 7, a), (3, 7, b), (3, 7, c), (3, 8, a), (3, 8, b), (3, 8, c)\}. \end{aligned}$$

Полученные элементы можно интерпретировать как точки некоторого трехмерного пространства. Их число равно

$$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18. \quad \parallel$$

Пример 1.9. Пусть X — числовая прямая. Найти декартово произведение $X \times X$.

$\parallel$ Декартово произведение $X \times X$ представляет собой множество всех пар вида (x, y) , где x и y — произвольные числа. Пары (x, y) в некоторой декартовой системе могут быть интерпретированы как точки с координатами x и y . Эти точки заполняют всю координатную плоскость. $\parallel$

Пусть заданы два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ с мощностями соответственно $n(A) = k$ и $n(B) = m$. Справедлива следующая теорема об умножении мощностей.

Теорема 1.8. Мощность декартова произведения $A \times B$ равна произведению мощностей множеств, образующих это произведение, т.е. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

$\parallel$ Построение декартова произведения $A \times B$ осуществим следующим образом. К элементу a_1 последовательно присоединим элементы множества B . В результате получим m пар вида (a_1, b_i) , $i = 1, m$, которые помещены в 1-й строке табл. (1.2). Затем берем второй элемент a_2 множества A и к нему присоединяем последовательно элементы множества B . В результате получим опять m пар вида (a_2, b_i) , $i = 1, m$, которые помещены во 2-й строке табл. (1.2). Повторяя эту процедуру k раз, мы построим следующую таблицу:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \dots, & (a_1, b_m), \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \dots, & (a_2, b_m), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_k, b_1), & (a_k, b_2), & \dots, & (a_k, b_m). \end{array} \quad (1.2)$$

Она целиком составлена из всех элементов декартова произведения $A \times B$. Причем число этих элементов $n(A \times B) = k \cdot m = n(A) \cdot n(B)$. $\parallel$

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА (КОМБИНАТОРИКИ)

Пусть задано некоторое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ мощности $n(A) = m$. Рассмотрим его всевозможные подмножества мощности k . Эти подмножества имеют вид $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ и могут отличаться друг от друга либо элементами, входящими в них, либо порядком их расположения.

Определение 1.8. Говорят, что подмножества

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

мощности k образуют размещения из m элементов по k , если эти подмножества отличаются друг от друга либо входящими в них элементами, либо порядком их расположения. Число таких всевозможных размещений обозначим через A_m^k .

Определение 1.9. Размещения из k элементов по k называются *перестановками* из k элементов.

Из этого определения непосредственно следует, что перестановки состоят из одних и тех же элементов и отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов. Число всевозможных перестановок из k элементов обозначим через P_k .

Определение 1.10. Говорят, что подмножества

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

мощности k образуют *сочетания* из m элементов по k , если эти подмножества отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Число таких всевозможных сочетаний обозначим через C_m^k .

А теперь найдем число размещений A_m^k . Используя метод математической индукции, покажем, что для его вычисления справедлива следующая формула:

$$A_m^k = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1). \quad (1.3)$$

|| Через A_m^k , $k = \overline{1, m}$, обозначим множество всех k -элементных размещений, составленных из m данных элементов. Очевидно, что мощность этого множества совпадает с числом размещений A_m^k , т.е. $n(A_m^k) = A_m^k$. При $k=1$ находим:

$$A_m^1 = A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\},$$

т.е. совокупность всех одноэлементных размещений совпадает с исходным множеством. Поэтому их количество $n(A_m^1) = n(A) = m$, и мы непосредственно убеждаемся в справедливости формулы (1.3) при $k=1$. Нетрудно проверить, что для A_m^2 имеет место следующее представление:

$$A_m^2 = \bigcup_{i=1}^m a_i \times A_i, \text{ где } A_i = A \setminus \{a_i\}.$$

Так как множества в объединении попарно не пересекаются, то для вычисления $n(A_m^2)$ можно использовать правила сложения и умножения мощностей (см. теоремы 1.7, 1.8):

$$n(A_m^2) = \sum_{i=1}^m n(a_i \times A_i) = \sum_{i=1}^m n(\{a_i\}) \cdot n(A_i) = \\ = \sum_{i=1}^m 1 \cdot (m-1) = m \cdot (m-1).$$

Тем самым мы показали справедливость формулы (1.3) и при $k=2$. По индукции, предполагая справедливость этой формулы для некоторого произвольного k , покажем возможность перехода в ней к $k+1$.

Пусть $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ — некоторое k -элементное размещение и

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}.$$

Тогда A_m^{k+1} можно представить в следующем виде:

$$A_m^{k+1} = \bigcup \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\} \times A_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

где объединение берется по всем k -элементным размещениям. Так как множества в объединении не пересекаются, то, опять используя правила сложения и умножения мощностей конечных множеств, получим:

$$n(A_m^{k+1}) = \sum_{A^k} n(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}) \cdot n(A_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \\ = \sum_{A^k} 1 \cdot (m-k) = A_m^k \cdot (m-k) = A_m^{k+1},$$

т.е. в формуле (1.3) переход от k к $k+1$ осуществим. $\parallel$

Пример 1.10. Для русского, французского, английского и татарского языков нужно составить словари для перевода с одного языка на другой. Сколько различных словарей можно составить?

$\parallel$ Здесь роль множества A играет множество языков: $A = \{P, \Phi, A, T\}$, $n(A) = m = 4$. Для составления каждого словаря используются любые два языка из четырех. Например, для русского и татарского языков получим русско-татарский словарь — $\{P, T\}$. Таким образом, в нашем примере $k=2$. Так как при составлении словарей важное значение имеют не только языки, но и их порядок (русско-татарский словарь $\{P, T\}$ существенно отличается от татарско-русского $\{T, P\}$), то мы здесь имеем дело с размещениями из 4 элементов по 2 элемента в каждом. Их число, согласно формуле (1.3), равно $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. $\parallel$

Переходя к вычислению перестановок из k элементов, т.е. величины P_k , учтем, что перестановки из k элементов — это размещение из k элементов по k элементов в каждом. Следовательно,

$$P_k = A_k^k = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-k+1) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = k!,$$

или

$$P_k = k!. \quad (1.4)$$

Пример 1.11. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 при условии, что цифры в числах не повторяются?

|| В этом случае $A = \{1, 2, 3\}$. Так как для составления чисел используются все цифры множества A , то в результате получим перестановки из 3 элементов (цифр). Их количество определяется по формуле (1.4): $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. ||

Наконец, приступим к вычислению числа всевозможных сочетаний из m элементов по k элементов, т.е. C_m^k . Для этой цели рассмотрим множество A_m^k всех размещений из m элементов по k . Все элементы A_m^k разместим по ячейкам прямоугольной таблицы: в первом столбце таблицы расположим те элементы данного множества, которые являются всевозможными сочетаниями из m элементов по k , а строки таблицы заполним перестановками соответствующих сочетаний, стоящих в первом столбце таблицы. Так как число строк построенной таблицы равно C_m^k , а количество столбцов равно количеству перестановок из k элементов, т.е. $P_k = k!$, то полное число ячеек в таблице составляет $A_m^k = C_m^k \cdot P_k$. Отсюда находим искомую величину

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!}. \quad (1.5)$$

Умножая числитель и знаменатель последней дроби на $(m-k)!$, формулу (1.5) можно записать в форме

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Заменяя в этой формуле k на $m-k$, получим

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

Следовательно, $C_m^k = C_m^{m-k}$. Это одно из важных свойств сочетаний. Его полезно использовать, если $k > m/2$. Чтобы последнее тождество было справедливо и при $k=0$, полагают, что $C_m^0 = 1$.

Пример 1.12. В соревнованиях по хоккею с шайбой участвуют 15 команд. Команды, занявшие первые 3 места, награждаются медалями. Сколько групп команд может быть награждено медалями?

|| Так как расположение команд в призовой тройке никакой роли не играет, то в задаче речь идет о вычислении числа C_{15}^3 , ибо любая призовая тройка составляется из 15 команд-участниц. Согласно формуле (1.5)

$$C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455. \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

1.5. БИНОМ НЬЮТОНА

Определение 1.11. Выражение вида

$$(a+b)^n,$$

где $a, b \in R$, $n \in N$, называется *биномом Ньютона*.

При $n=1, 2, 3$ мы имеем известные разложения:

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2;$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \\ &= C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3. \end{aligned}$$

Анализ приведенных разложений дает основание предположить, что при $n=k$ мы должны иметь следующее разложение:

$$\begin{aligned} (a+b)^k &= C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots \\ &\dots + C_k^m a^{k-m} b^m + \dots + C_k^k a^0 b^k. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Покажем, что это разложение справедливо и при $n=k+1$. С этой целью умножим его на $(a+b)$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= C_k^0 a^{k+1} b^0 + C_k^1 a^k b^1 + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \dots + \\ &+ C_k^m a^{k-m+1} b^m + \dots + C_k^k a^1 b^k + C_k^0 a^k b^1 + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \dots + \\ &+ C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + \dots + C_k^{k-1} a^1 b^k + C_k^k a^0 b^{k+1} = \{C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m\} = \\ &= C_{k+1}^0 a^{k+1} b^0 + C_{k+1}^1 a^k b^1 + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \dots + \\ &+ C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + \dots + C_{k+1}^{k+1} a^0 b^{k+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (1.6) верна и при замене k на $k+1$, что, согласно методу математической индукции, доказывает справедливость данной формулы при любом k .

Для формулы бинома Ньютона обычно используют более компактную форму записи:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (1.7)$$

Числа C_n^k в разложении (1.7) называются *биномиальными коэффициентами*. Полагая в формуле (1.7) $a = b = 1$, найдем их сумму:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (1.8)$$

1.6. КОЛЬЦА И АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Пусть M — некоторое множество и U — непустая совокупность его подмножеств.

Определение 1.12. U называется *кольцом*, если для $\forall A, B \in U$:

1) $A \cup B \in U$; 2) $A \setminus B \in U$.

По индукции легко показать, что условие 1) выполняется и для любого конечного числа множеств из U , т.е. если $A_i \in U$, $i = \overline{1, n}$, то и $\bigcup_{i=1}^n A_i \in U$. Таким образом, кольцо может быть определено как непустая совокупность подмножеств множества M , замкнутая относительно операций объединения конечного числа подмножеств и вычитания.

Теорема 1.9. Всякое кольцо U замкнуто относительно операции пересечения конечного числа подмножеств из U , т.е. если $A_i \in U$, $i = \overline{1, n}$, то и $\bigcap_{i=1}^n A_i \in U$.

Достаточно убедиться в этом для пересечения двух подмножеств. Пусть, например, $A, B \in U$. Тогда из формулы (см. пример 1.4) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ и определения кольца непосредственно следует, что $A \cap B \in U$. $\square$

Очевидно, каждое кольцо содержит пустое множество. Действительно, если $A \in U$, то $\emptyset = A \setminus A \in U$. Кстати, $U = \{\emptyset\}$ — тоже кольцо и является минимальным, порожденным множеством M . Другим тривиальным примером кольца может служить совокупность всех подмножеств множества M . Совокупность всех конечных подмножеств множества M тоже представляет пример кольца.

Определение 1.13. Непустая совокупность U подмножеств множества M называется *алгеброй*, если:

1) U — кольцо; 2) $M \in U$.

Тривиальным примером алгебры может служить совокупность всех подмножеств множества M .

Определение 1.14. Непустая совокупность U подмножеств множества M называется σ -кольцом, если она — кольцо, замкнутое относительно счетного объединения подмножеств, т.е. если $A_i \in U$, $i = \overline{1, \infty}$, то и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$.

Совокупность всех счетных подмножеств множества M образует σ -кольцо. Нетрудно убедиться, что σ -кольцо замкнуто и относи-

тельно счетного пересечения подмножеств из U . Действительно, если $A_i \in U$, $i = \overline{1, \infty}$, то

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A_i) = \{ \text{используя принцип двойственности в теории множеств, имеем} \} = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_i) \in U$.

Аналогичным образом вводится определение σ -алгебры.

Определение 1.15. Непустая совокупность U подмножеств множества M называется σ -алгеброй, если:

1) U — σ -кольцо; 2) $M \in U$.

Тривиальным примером σ -алгебры может служить совокупность всех подмножеств множества M .

Если дано некоторое множество σ -алгебр U_α , состоящих из подмножеств множества M , то их пересечение $U = \bigcap U_\alpha$ — тоже σ -алгебра. Действительно, так как $M \in U_\alpha$ для $\forall \alpha$, то $M \in U = \bigcap U_\alpha$.

Далее, пусть $A_i \in U$, $i = \overline{1, \infty}$. Следовательно, $A_i \in U_\alpha$, $i = \overline{1, \infty}$ для $\forall \alpha$.

Так как U_α — σ -алгебра, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U_\alpha$ для $\forall \alpha$, следовательно, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$ и U — σ -алгебра.

Пусть теперь B — некоторая совокупность подмножеств множества M и $\{U_\alpha\}$ — совокупность всех σ -алгебр, его содержащих (т.е. $B \in U_\alpha$, $\forall \alpha$). Как было показано выше, $U = \bigcap U_\alpha$ — σ -алгебра. Очевидно, $B \in U$ и $B \in U$ является минимальной σ -алгеброй, содержащей эту совокупность подмножеств (говорят, что $B \in U$ — минимальная σ -алгебра, порожденная совокупностью B).

1.7. АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

Определение 1.16. Функция, областью задания которой является некоторая совокупность множеств, называется *функцией множества*.

Пусть вещественная функция $f(A)$ задана для всех множеств A из совокупности U некоторых множеств, и для определенности предположим, что она принимает на U только конечные значения.

Определение 1.17. Функция $f(A)$ называется *счетно-аддитивной*, если для любой конечной или счетной совокупности попарно непересекающихся множеств $A_i \in U$, для которых $\bigcup_i A_i \in U$, выполняется равенство

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i f(A_i). \quad (1.9)$$

Если равенство (1.9) выполняется только для конечной суммы попарно непересекающихся множеств, то функция $f(A)$ называется *конечно-аддитивной*.

В дальнейшем предположим, что областью задания функции $f(A)$ является некоторая σ -алгебра U и счетно-аддитивная функция $f(A)$ принимает на U только положительные значения.

Теорема 1.9. Если $f: U \rightarrow R$, где U — некоторая σ -алгебра и $f(A) \geq 0$ для $\forall A \in U$, то:

- 1) $f(A) \leq f(B)$, если $A \subset B$;
- 2) $f(\emptyset) = 0$;
- 3) $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ для $\forall A, B \in U$.

|| 1) Если $B \supset A$, то $B = A \cup (B \setminus A)$, где множества в объединении не пересекаются. Следовательно,

$$f(B) = f(A) + f(B \setminus A). \quad (1.10)$$

Так как $f(B \setminus A) \geq 0$, то $f(B) \geq f(A)$, т.е. $f(A)$ — монотонная функция на U .

2) Далее, полагая в равенстве (1.10) $B = A$, непосредственно находим, что $f(\emptyset) = 0$.

3) Для доказательства последнего утверждения теоремы используем тождества

$$A \cup B = A \cup (B \cap A) \text{ и } B = (B \cap A) \cup (B \setminus A).$$

Так как множества в объединениях не пересекаются, а функция $f(A)$ — аддитивная, то $f(A \cup B) = f(A) + f(B \cap A)$ и $f(B) = f(B \cap A) + f(B \setminus A)$, откуда следует, что

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B). \quad ||$$

Теорема 1.10. Пусть выполнены условия теоремы 1.9. Тогда:

1) если $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in U$ и образуют возрастающую последовательность, то $f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n)$;

2) если же $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in U$ и образуют убывающую последовательность, то $f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n)$.

|| 1) Из теоремы 1.3 и счетной аддитивности функции $f(A)$ следует, что

$$f(A) = f(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=2}^n \{f(A_i) - f(A_{i-1})\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n).$$

2) Так как $A \setminus A = \emptyset = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A)$ и множества $A_n \setminus A$, $n = \overline{1, \infty}$ образуют убывающую последовательность, то согласно теореме 1.1

$$A_1 \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}).$$

Здесь множества справа в объединении попарно не пересекаются. Следовательно,

$$f(A_1) - f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \{f(A_k) - f(A_{k+1})\} \right) = f(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n),$$

т.е. $f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n)$. $\parallel$

А сейчас укажем связь между конечно-аддитивными и счетно-аддитивными функциями.

Теорема 1.11. Для того чтобы конечно-аддитивная функция $f(A)$ с конечными значениями, заданная на σ -алгебре U , была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы для любой убывающей последовательности множеств $A_i \in U$, $i = 1, \infty$ с пустым пересечением $\lim_{n \rightarrow \infty} f(A) = 0$.

$\parallel$ Доказательство необходимости немедленно следует из теоремы 1.10, где вместо множества A нужно взять пустое множество.

Для доказательства достаточности возьмем произвольную последовательность A_i , $i = 1, \infty$ непересекающихся множеств из U и положим

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i + B_n,$$

где множества $B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$, согласно теореме 1.2, образуют убывающую последовательность с пустым пересечением. Поэтому по условию теоремы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(B_n) = 0$. Так как функция $f(A)$ конечно-аддитивная, то

$$f(A) = f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + f(B_n) = \sum_{i=1}^n f(A_i) + f(B_n).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, получим доказательство теоремы:

$$f(A) = f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(A_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(B_n) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i). \parallel$$

Если область определения B аддитивной функции $f(A)$ не является σ -алгеброй, то функцию $f(A)$ можно доопределить на множествах из минимальной σ -алгебры U^* , порожденной B . Приведем без доказательства следующую теорему¹.

Теорема 1.12. Пусть на совокупности множеств B задана конечная аддитивная функция $f(A)$ и U^* — минимальная σ -алгебра, порожд-

¹ Доказательство аналогичной теоремы о распространении конечной меры можно найти в книге [2, гл. IV, § 5].

денная совокупностью B . Тогда существует единственная счетно-аддитивная функция $f^*(A)$, заданная на U^* и совпадающая с $f(A)$, если $A \in B$.

В заключение приведем примеры аддитивных функций, заданных на множествах.

Пример 1.13. Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — конечное множество и U — множество всех его подмножеств. Как было показано выше, U — алгебра. Если $A \in U$, то положим $f(A) = n(A)$, где $n(A)$ — мощность конечного подмножества A . Аддитивность функции $n(A)$ следует из теоремы 1.7 о сложении мощностей.

Пример 1.14. Пусть $M = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1\}$ — единичный квадрат на плоскости и U — совокупность всех квадратируемых множеств (областей) в M . U — σ -алгебра, ибо, как известно, конечное или счетное объединение квадратируемых множеств квадратируемо¹. Если $A \in U$, то положим $f(A) = m(A)$, где $m(A) = \text{mes}(A)$, т.е. мера или площадь множества A . Так как мера счетно-аддитивна, то и функция $f(A) = m(A)$ — счетно-аддитивна.

Пример 1.15. Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — конечное множество и U — множество всех его подмножеств (см. пример 1.13). Пусть, кроме того, задана совокупность положительных вещественных чисел p_k , $k = 1, n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

На алгебре U определим функцию $f(A) = P(A)$ следующим образом:

- 1) $P(a_k) = p_k$, $k = \overline{1, n}$;
- 2) если $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\} \in U$, то

$$P(A) = \sum_{s=1}^k P(a_{i_s}). \quad (1.11)$$

Проверим, что $P(A)$ — аддитивная функция, определенная на алгебре U .

Действительно, если

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\} \text{ и } B = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}\}$$

два произвольных непересекающихся подмножества из U , то $A \cup B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}\}$ и согласно формуле (1.11)

$$P(A \cup B) = \sum_{s=1}^k P(a_{i_s}) + \sum_{r=1}^m P(a_{j_r}) = P(A) + P(B),$$

¹ Доказательство этого утверждения, например, приведено в [1, гл. 8, § 2].

т.е. функция $P(A)$ является аддитивной функцией. Из формулы (1.11), в частности, следует, что

$$P(M) = \sum_{k=1}^n P(a_k) = \sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

В дальнейшем всякую аддитивную функцию $P(A)$, заданную на алгебре U и удовлетворяющую условиям 1) — 3), назовем *вероятностью*, а тройку $\{M, U, P\}$ — *вероятностным пространством*.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Доказать следующие утверждения:

- а) из $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$;
- б) из $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$;
- в) из $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ и $A \cap B = A$.

1.2. Доказать:

- а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.3. Вытекает ли из $A \setminus B = C$, что $A = B \cup C$?

1.4. Вытекает ли из $A = B \cup C$, что $A \setminus B = C$?

1.5. Доказать включение

$$\bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k \subset \bigcup_k (A_k \setminus B_k).$$

Показать на примере, что в общем случае здесь не имеет места равенство.

1.6. Множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ называется симметричной разностью множеств A и B . Доказать, что:

- а) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$;
- б) $A \Delta B = (A \cap CB) \cup (B \cap CA)$.

1.7. Доказать счетность:

- а) множества положительных четных чисел;
- б) множества всех целых чисел;
- в) множества всех положительных рациональных чисел;
- г) множества всех рациональных чисел.

1.8. Доказать, что:

- а) счетное объединение конечных множеств счетно;
- б) конечное объединение счетных множеств счетно;
- в) счетное объединение счетных множеств счетно.

1.9. Даны два бесконечных множества $A \sim B$. Из множества A выделяется счетное множество C . Доказать, что если $A \setminus C$ — бесконечно, то:

- а) $A \setminus C \sim B$;
- б) $A \setminus C \sim A$.

1.10. Доказать, что $(0, 1) \sim [0, 1]$.

1.11. Доказать, что множество точек окружности несчетно.

1.12. Вычислить $P_3, P_5, A_8^3, C_9^3, C_9^5, C_{100}^{97}$.

1.13. Доказать, что $C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m$.

1.14. Сколькими способами можно расставить на полке 4 книги?

1.15. В забеге участвуют 5 студентов. Сколькими способами могут распределиться 2 первых места?

1.16. Сколькими способами из 8 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 5 человек?

1.17. Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 20 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание экзаменов?

1.18. Пассажирский поезд состоит из двух багажных, четырех плацкартных и трех купированных вагонов. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале, а купированные — в конце?

1.19. На железной дороге 50 станций. На каждом билете печатаются названия станций отправления и прибытия. Сколько различных билетов можно напечатать?

2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

2.1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ. ПРИМЕРЫ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

При внимательном изучении многих экспериментов мы замечаем, что исходы этих экспериментов, как правило, являются неоднозначными и их появление носит случайный характер. В дальнейшем эти исходы, наступившие в результате некоторого эксперимента, будем называть элементарными исходами (элементарными событиями), а их совокупность — пространством элементарных исходов (событий). Сказанное поясним на примерах.

Пример 2.1. *Подбрасывание монеты один раз.*

В результате этого опыта возможно либо выпадение герба — элементарное событие ω_1 , либо решетки — элементарное событие ω_2 . Пространство элементарных событий Ω содержит два элемента, значит, $\Omega = \Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Пример 2.2. *Подбрасывание игральной кости один раз.*

Пусть на гранях игральной кости нанесены соответственно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. В этом случае возможными исходами опыта являются появления верхней грани с одной из указанных цифр — элементарные события ω_k , $k = \overline{1, 6}$. Пространство элементарных событий имеет вид

$$\Omega = \Omega_6 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Пример 2.3. *Одновременное подбрасывание двух игральных костей один раз.*

Через ω_{ik} , $1 \leq i, k \leq 6$ обозначим элементарное событие, заключающееся в появлении на верхних гранях подбрасываемых игральных костей цифр i и k соответственно. Пространство элементарных событий Ω состоит из 36 элементов и имеет вид $\Omega = \Omega_{36} = \{\omega_{ik}, 1 \leq i, k \leq 6\}$.

Кстати, это пространство можно получить как двойное декартово произведение пространства, рассмотренного в предыдущем примере, т.е. $\Omega_{36} = \Omega_6 \times \Omega_6$, при этом $\omega_{ik} = (\omega_i, \omega_k)$ и $n(\Omega_{36}) = n(\Omega_6) \cdot n(\Omega_6) = 6 \cdot 6 = 36$.

Пример 2.4. *Подбрасывание монеты n раз.*

Каждый исход опыта — элементарное событие — можно представить в виде последовательности из n членов: $(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n})$, где $i_k = \overline{1, 2}$, $k = \overline{1, n}$, а события ω_1 и ω_2 , как и в примере 2.1, выражают появление в каждом из n испытаний герба и решетки соответственно. При этом пространство элементарных событий Ω представимо в виде

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : i_k = 1, 2; k = \overline{1, n}\} = \\ = \{\omega_1, \omega_2\} \times \{\omega_1, \omega_2\} \times \dots \times \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Следовательно,

$$n(\Omega) = n(\{\omega_1, \omega_2\}) \cdot n(\{\omega_1, \omega_2\}) \cdot \dots \cdot n(\{\omega_1, \omega_2\}) = 2^n.$$

Пример 2.5. Работа касс аэропорта.

Предположим, что мы изучаем работу касс аэропорта в течение одного часа. За это время может так случиться, что кассами не будет продано ни одного билета либо, напротив, будет продан один, два и т.д. билетов. В связи с тем что мы не сможем заранее определить, сколько будет продано билетов за это время, видимо, разумно не указывать верхнюю границу числа проданных билетов и считать возможными исходами нуль и все натуральные числа: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. В отличие от предыдущих примеров в этом случае пространство элементарных событий является бесконечным и счетным.

Пример 2.6. Стрельба по плоской мишени.

Введем в плоскости мишени систему координат Oxy и каждому исходу опыта (попадание в определенную точку плоскости) поставим в соответствие координаты этой точки (x, y) — элементарное событие. Тогда множеством элементарных событий будет являться вся координатная плоскость Oxy :

$$\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\},$$

т.е. в этом случае пространство Ω является бесконечным и несчетным.

А теперь, абстрагируясь от вышеприведенных примеров и желая построить для них общую математическую модель, рассмотрим произвольное множество Ω . Назовем Ω пространством элементарных событий, а его элементы — элементарными событиями и обозначим их через ω . Если пространство Ω конечно или счетно, то его можно представить в виде $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$.

Определение 2.1. Любое подмножество пространства Ω назовем случайным событием (или просто событием).

В частности, в примере 2.2 события $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ и $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ обозначают выпадение на верхней грани четных и нечетных цифр соответственно. А в примере 2.6 событие $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ указывает на попадание при стрельбе в единичный круг с центром в начале координат.

В связи с тем что любое событие A однозначно определяется некоторым множеством из Ω , то операции над событиями определим так же, как и над множествами (см. п. 1.1). В новых терминах (терминах событий) они выглядят следующим образом.

Под суммой $A \cup B$ (или $A + B$) событий A и B понимают событие, заключающееся в наступлении либо события A , либо события B .

Под произведением $A \cap B$ (или $A \cdot B$) событий A и B понимают событие, заключающееся в одновременном наступлении событий A и B .

Под разностью $A \setminus B$ событий A и B понимают событие, при котором событие A наступает, но событие B не наступает.

Определение 2.2. Событие Ω называется *достоверным*.

Определение 2.3. Событие $\emptyset$ называется *невозможным*.

Определение 2.4. Событие

$$\Omega \setminus A = CA = \bar{A}$$

называется *противоположным* событию A .

Следовательно, событие $\bar{A}$ означает, что событие A не произошло.

Определение 2.5. Если $A \cap B = \emptyset$, то события A и B называются *несовместными*.

Их совместное наступление исключено. В частности, в примерах 2.1–2.6 все элементарные события являются несовместными.

Если при каждом наступлении события A одновременно наступает и событие B , то это означает, что $A \subset B$.

В этом параграфе и в дальнейшем, рассматривая различные классы событий из Ω , мы подробней остановимся на тех классах U , которые образуют либо алгебру, либо σ -алгебру событий из Ω .

2.2. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Определение 2.6. Числовая функция $P: U \rightarrow R_+$ называется *вероятностью*, если выполнены следующие условия:

A_1 . U является алгеброй (σ -алгеброй).

A_2 . $P(A \geq 0)$ для $\forall A \in U$.

A_3 . $P(\Omega) = 1$.

A_4 . Аксиома конечной аддитивности: для любых несовместных событий $A, B \in U$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

A_5 . Аксиома непрерывности или счетной аддитивности: для любой убывающей последовательности событий $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, произведение которых есть невозможное событие,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Из определения 2.6 и результатов пункта 1.6 следует, что вероятность $P(A)$, $A \in U$, является неотрицательной счетно-аддитивной функцией с конечными значениями, определенной на алгебре (σ -ал-

гебре) U . Поэтому вероятность $P(A)$, как и любая аддитивная функция множеств, обладает следующими свойствами:

- 1) $P(A)$ монотонна, т.е. если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$;
- 2) $P(\emptyset) = 0$;
- 3) для $\forall A, B \in U$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

- 4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Последнее равенство следует из того, что

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1,$$

ибо $A + \bar{A} = \Omega$ и события A и $\bar{A}$ несовместны.

Из теоремы 1.11 следует, что аксиома A_5 обеспечивает счетную аддитивность вероятности $P(A)$.

Замечание. Если U — область задания вероятности $P(A)$ и она не является σ -алгеброй, то, как известно, U можно погрузить в минимальную σ -алгебру U^* . Тогда согласно теореме 1.12 можно найти единственную счетно-аддитивную вероятность $P^*: U \rightarrow R_+$, что $P^*(A) = P(A)$ для $\forall A \in U$. В этом случае вероятность $P^*(A)$ называется продолжением вероятности $P(A)$ с класса событий U на минимальную σ -алгебру U^* , порожденную U .

Пусть на алгебре (σ -алгебре) U , порожденной пространством элементарных событий Ω , задана вероятность $P(A)$, $A \in U$. Тогда тройка $\{\Omega, U, P\}$ называется **вероятностным пространством**.

А теперь рассмотрим частный случай вероятностного пространства, когда $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ — конечно. В этом случае областью задания вероятности $P(A)$ служит алгебра U — множество всех 2^m событий, образованных с помощью элементарных событий ω_k , $k = 1, m$. Нетрудно заметить, что для задания вероятности на алгебре U достаточно задать ее значения на элементарных событиях ω_k , $k = 1, m$, т.е. задать m чисел $p_k > 0$ таких, что

$$P(\omega_k) = p_k, \quad k = \overline{1, m} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^m p_k = 1.$$

Если теперь $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$, то положим

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_k}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}.$$

При этом нетрудно проверить, что выполняются все аксиомы $A_2 - A_4$ из определения вероятности.

Действительно, если события

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\} \quad \text{и} \quad B = \{\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \dots, \omega_{l_s}\}$$

несовместны, т.е. $A \cap B = \emptyset$, то в сумме $A \cup B$ все элементарные события различны и

$$P(A \cup B) = \sum_{\substack{\omega \in A \\ \omega \in B}} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B} P(\omega) = P(A) + P(B).$$

Далее,

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{k=1}^m P(\omega_k) = \sum_{k=1}^m p_k = 1.$$

Интересен случай, когда $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 1/m$, т.е. когда наступление всех элементарных событий равновозможно. Тогда если событие $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ содержит k элементарных событий (говорят, что k элементарных событий благоприятствуют наступлению события A), т.е. $n(A) = k$, то

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_k}) = \\ &= p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} = \frac{k}{m} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \end{aligned}$$

или

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{k}{m}.$$

Мы получили классическое определение вероятности случайного события.

Определение 2.7. Если пространство Ω состоит из m равновозможных элементарных событий, то вероятность события A , содержащего k элементарных событий, равна отношению

$$P(A) = \frac{k}{m} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим примеры на использование последней формулы.

Пример 2.7. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти:

- 1) вероятность появления на верхней грани четной цифры (событие A);
- 2) вероятность появления на верхней грани цифры не менее 3 (событие B).

|| 1) Обозначим исходы опыта через ω_k , $k = \overline{1,6}$ — на верхней грани появилась цифра k . Тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

и событие $A\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ обозначает, что на верхней грани появилась четная цифра. Согласно формуле (2.1)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2) В этом случае $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ и

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \quad \parallel$$

Пример 2.8. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры (событие A).

$\parallel$ Равновозможные элементарные исходы имеют вид

$$\omega_{i_1 i_2} = i_1 i_2, \quad i_1, i_2 = \overline{0,9}.$$

Их число равно числу размещений из десяти цифр по 2, т.е. $n(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Событие A состоит из одного элемента $\omega_{i_1 i_2}$,

т.е. $n(A) = 1$. Поэтому $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}$. $\parallel$

Пример 2.9. На стол брошены 2 игральные кости. Найти вероятность появления: 1) шестерки хотя бы на одной из костей (событие A); 2) суммы очков, равной 4 (событие B); 3) на обеих костях одинаковых цифр (событие C).

$\parallel$ В примере 2.3 показано, что $\Omega = \{\omega_{ik}, i, k = \overline{1,6}\}$, где элементарный исход ω_{ik} состоит в появлении цифр i и k на верхних гранях первой и второй кости, соответственно. Мощность $n(\Omega) = 36$.

1) Мощность события A , т.е.

$$n(A) = n(\{\omega_{6i} : i = \overline{1,6}\}) + n(\{\omega_{i6} : i = \overline{1,6}\}) = 6 + 5 = 11.$$

Следовательно, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11}{36}$.

2) Согласно условию задачи событие B представимо в виде $B = \{\omega_{13}, \omega_{22}, \omega_{31}\}$. Поэтому

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3) Так как $C = \{\omega_{ii}, i = \overline{1,6}\}$ и $n(C) = 6$, то

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \quad \parallel$$

Пример 2.10. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу выбирают n деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется ровно m стандартных (событие A).

$\parallel$ В данной задаче за элементарные события естественно взять набор — сочетания, составленные из N деталей по n деталей в каждом. Их число C_N^n . Элементарные события, входящие в событие A , по условию задачи содержат по n деталей и состоят из двух частей: набора из m стандартных и $n-m$ нестандартных деталей. Так как набор из m стандартных деталей составляется из M стандартных деталей (их число равно C_M^m), а набор из $n-m$ нестандартных деталей выбирается из $N-M$ нестандартных деталей (их число равно C_{N-M}^{n-m}), то число элементарных событий, входящих в событие A , равно произведению $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$. Искомую вероятность находим по формуле (2.1):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \quad (2.2)$$

Набор чисел (2.2) называют гипергеометрическим распределением вероятности (см. подробней в п. 4.6). $\parallel$

Пусть теперь пространство событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ — счетно и $\mathcal{U}$ — σ -алгебра, порожденная Ω и содержащая все его подмножества. Рассмотрим последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Для любого события $A \in \mathcal{U}$ положим

$$P(A) = \sum_{k \in \{n: \omega_n \in A\}} p_k. \quad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что функция, определяемая формулой (2.3), представляет собой вероятность, заданную на σ -алгебре $\mathcal{U}$ и удовлетворяющую всем аксиомам A_2 – A_4 . Проверим выполнимость аксиомы A_5 , т.е. покажем, что вероятность $P(A)$ — счетно-аддитивна.

Пусть $A_n = \{\omega_{i_1(n)}, \omega_{i_2(n)}, \dots\}$ — некоторая убывающая последовательность событий с пустым пересечением. Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что индексы $i_k(n)$ в представлении A_n расположены в порядке их возрастания, т.е. $i_1(n) < i_2(n) < \dots$. Так как по условию $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то необходимо $i_1(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, по формуле (2.3) находим

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k(n)} \leq \sum_{r=i_1(n)}^{\infty} p_r. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$, ибо в неравенстве (2.4) справа находится остаток сходящегося ряда. Последнее равенство эквивалентно тому, что вероятность (2.3) является счетно-аддитивной.

Из того, что $P(\omega_n) = p_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, следует важный вывод: для дискретных вероятностных пространств (как конечных, так и бесконечных) вероятность $P(A)$ однозначно определяется ее значениями для элементарных событий.

В дальнейшем дискретные вероятностные пространства будем обозначать $\{\Omega, P\}$ (вместо $\{\Omega, U, P\}$), ибо в этом случае структура построения U известна: U — максимальная алгебра (σ -алгебра), порожденная Ω .

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическое определение вероятности нельзя использовать, если число равновозможных элементарных событий бесконечно, поскольку при этом $n(\Omega) = \infty$. В этом случае для решения проблемы обращаются к геометрическому определению вероятности. Суть этого понятия состоит в следующем.

Пусть Ω — некоторое ограниченное измеримое множество n -мерного евклидова пространства. Для определенности под мерой (объемом) множества Ω будем понимать его меру Лебега $\mu(\Omega)$. Тогда, как известно, совокупность всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Ω образует σ -алгебру. Для $\forall A \in U$ положим

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad (2.5)$$

где $\mu(A)$ — мера (объем) подмножества A из U . Так как мера Лебега, заданная на σ -алгебрах, является неотрицательной счетно-аддитивной функцией, то функция $P(A)$, определенная по формуле (2.5) (ввиду того, что и $P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$), является вероятностью, заданной на σ -алгебре U . Назовем ее геометрической вероятностью.

Из формулы (2.5) следует, что вероятность подмножеств из U зависит только от их мер и не зависит от их расположений в пространстве Ω . Имея это в виду, говорят, что введенная таким образом вероятность $P(A)$ равномерно распределена в пространстве Ω .

Приведем пример на использование геометрической вероятности.

Пример 2.11. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет вто-

рого в течение четверти часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

|| Обозначим момент прихода первого студента через x , второго — через y , предварительно для простоты предположив, что встреча должна состояться между 0 и 1 часами. Изобразим x и y как декартовы координаты точки (x, y) на плоскости (рис. 2.1). В качестве единицы масштаба выберем час. Все возможные исходы изобразятся точками единичного квадрата, т.е. $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. По условию задачи, для того

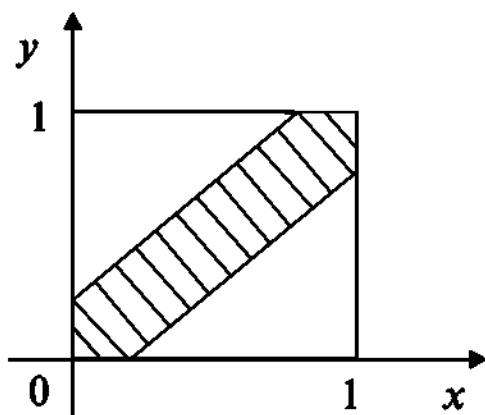


Рис. 2.1

чтобы встреча произошла, т.е. наступило событие A , необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \leq \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$A = \left\{ (x, y): |x - y| \leq \frac{1}{4} \right\}$$

и на рис. 2.1 подмножество A представляет собой заштрихованную область. Искомую вероятность находим по формуле (2.5):

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \left(1^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) / 1^2 = \frac{7}{16}. \quad ||$$

2.4. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

При решении различных задач часто в качестве пространства исходов Ω приходится рассматривать все n -мерное евклидово пространство R_n . Так как в этом случае $\mu(\Omega) = \infty$, то для отыскания вероятностей различных событий формула (2.5) уже неприменима. Из создавшегося затруднительного положения выходят следующим образом.

Пусть неотрицательная функция $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана во всем евклидовом пространстве $R_n = \Omega$ и интегрируема по Лебегу по любой измеримой области из Ω . Кроме того, предположим, что существует несобственный интеграл от этой функции по Ω и

$$\iint \dots \int_{\Omega} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (2.6)$$

Обозначим через U σ -алгебру, порожденную всеми измеримыми областями из Ω . А теперь, полагая для любого $A \in U$

$$P(A) = \iint \cdots \int_A p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad (2.7)$$

мы определим вероятность на σ -алгебре U , удовлетворяющую аксиомам $A_2 - A_5$, ибо указанными в аксиомах A_2, A_4, A_5 свойствами обладает интеграл Лебега от неотрицательных интегрируемых функций. Введенное таким образом вероятностное пространство называется n -мерным абсолютно непрерывным вероятностным пространством.

Укажем, что вероятностное пространство, построенное в предыдущем п. 2.3, является частным случаем абсолютно непрерывных вероятностных пространств, ибо в этом случае в формуле (2.7) нужно положить

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1/\mu(\Omega), & \text{если } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin \Omega. \end{cases}$$

2.5. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА

Из всего многообразия способов введения различных вероятностных пространств, осуществленных в предыдущих пунктах, следует, что построение этих моделей совершается далеко не однозначно. Поэтому одно из важных требований, предъявляемых к построенным математическим моделям, состоит в том, чтобы эти математические схемы адекватно выражали реальные события. В связи с этим возникает необходимость установления таких критериев, признаков, которые бы в дальнейшем дали возможность заключить, что предлагаемая математическая модель наиболее верно отражает те процессы, которые изучаются с помощью этой модели. При решении этой задачи важную роль играет относительная частота появления случайного события.

Пусть в результате m испытаний, которые проводились при одинаковых условиях, событие A наступило k раз. Тогда отношение

$$P^*(A) = \frac{k}{m} \quad (2.8)$$

называется относительной частотой события A , найденной в серии из m испытаний. Многочисленные эксперименты, проведенные над случайными событиями, показывают, что, когда число испытаний достаточно велико (m велико), относительная частота $P^*(A)$ колеблется около некоторого среднего значения (вероятности этого события $P(A)$), мало от него отличаясь.

Доказано (теорема Бернулли, см. п. 5.4), что при возрастании n возрастает вероятность малых отклонений P^* от P : $P^* \xrightarrow{\text{по вер.}} P$ (P^* по вероятности стремится к P).

Это обстоятельство на практике используется в различных направлениях: **во-первых**, для так называемого статистического определения вероятности, когда за вероятность события в одном испытании принимается относительная частота, найденная в серии достаточно большого количества фактически проведенных испытаний; **во-вторых**, для проверки соответствия предлагаемой математической модели ее реальному прообразу, если эта модель уже построена, и для решения вопроса о ее эффективности.

Пример 2.12. При 20 выстрелах было зафиксировано 15 поражений мишени. Какова относительная частота поражения мишени?

|| Относительную частоту $P^*(A)$ поражения мишени находим по формуле (2.8):

$$P^*(A) = 15/20 = 0,75.$$

Ее можно принять за приближенное значение вероятности события A (поражение мишени при одном выстреле):

$$P(A) \approx P^*(A) = 0,75. \quad \underline{\underline{||}}$$

2.6. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение 2.8. Два события A и B называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от наступления или ненаступления другого события. В противном случае события A и B называются зависимыми.

Пусть события A и B зависимы.

Определение 2.9. Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную при условии, что событие A уже наступило.

Перед изучением зависимых случайных событий и их вероятностей рассмотрим пример, иллюстрирующий введенные понятия.

Пример 2.13. На сборку поступило две партии деталей: соответственно по 20 и 30 деталей в каждой. Первая партия содержит 18 годных деталей, вторая — 26. Найти: 1) вероятность события B , заключающегося в том, что взятая наудачу деталь является годной; 2) вероятность события B , если деталь наудачу взята: а) из первой партии (событие A); б) из второй партии (событие $\bar{A}$).

|| 1) Пространство элементарных событий Ω (множество всех деталей, содержащихся в обеих партиях) состоит из $20 + 30 = 50$ де-

талей. Следовательно, $n(\Omega) = 50$. Среди них $18 + 26 = 44$ годных детали, т.е. $n(B) = 44$. Следовательно, по формуле (2.1)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{44}{50} = 0,88.$$

2) а) В первой партии (событие A) содержится $n(A) = 20$ деталей, среди них $n_A(B) = 18$ годных. Следовательно, согласно определению 2.9 можно найти условную вероятность $P_A(B)$. Имеем

$$P_A(B) = \frac{n_A(B)}{n(A)} = \frac{18}{20} = 0,9.$$

б) В этом случае $n(\bar{A}) = 30$, $n_{\bar{A}}(B) = 26$. Следовательно,

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{n_{\bar{A}}(B)}{n(\bar{A})} = \frac{26}{30} \approx 0,87. \quad _$$

Учитывая, что $n_A(B) = n(AB)$, формулу

$$P_A(B) = \frac{n_A(B)}{n(A)}$$

преобразуем следующим образом:

$$P_A(B) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} : \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

или окончательно

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (2.9)$$

Опираясь на полученную формулу (2.9), дадим общее определение условной вероятности.

Определение 2.10. Пусть $\{\Omega, U, P\}$ — произвольное вероятностное пространство. Если $A, B \in U$ и $P(A) > 0$, то условная вероятность события B при условии, что событие A наступило, определяется формулой (2.9).

А теперь зафиксируем событие $A \neq \emptyset$ в формуле (2.9). Тогда формула (2.9) определит однозначно некоторую вероятность, заданную на той же σ -алгебре U и обладающую теми же свойствами, что и вероятность P . Пусть, например, B_1 и B_2 — два несовместных события из U . Тогда события AB_1 и AB_2 тоже будут несовместными и

$$P_A(B_1 + B_2) = \frac{P(A(B_1 + B_2))}{P(A)} = \frac{P(AB_1 + AB_2)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(AB_1)}{P(A)} + \frac{P(AB_2)}{P(A)} = P_A(B_1) + P_A(B_2),$$

т.е. условная вероятность $P_A(B)$ аддитивна. Аналогично проверяется, что

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Из определения 2.8 следует, что для независимых событий A и B вероятность $P(B)$ события B должна совпадать с условной вероятностью $P_A(B)$ этого события, т.е.

$$P_A(B) = P(B). \quad (2.10)$$

Условие (2.10) часто используется для определения независимых событий. Из формулы (2.9) непосредственно следует, что

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (2.11)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.1 (об умножении вероятностей). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие уже наступило.

Формулу (2.11) можно по индукции распространить на произведение трех и более событий. А именно справедлива следующая формула:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1}}(A_n). \quad (2.12)$$

Действительно, если формула (2.12) справедлива для $n = k$, то при $n = k + 1$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1}) = P(A_1 A_2 \cdots A_k) \cdot P_{A_1 A_2 \cdots A_k}(A_{k+1}) =$$

$$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 A_2 \cdots A_{k-1}}(A_k) \cdot P_{A_1 A_2 \cdots A_k}(A_{k+1}),$$

т.е. формула (2.12) справедлива и в этом случае.

Для двух независимых событий A и B формуле (2.11) с учетом (2.10) можно придать более простой вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.13)$$

Теорема 2.2 (об умножении вероятностей независимых событий). Если события A и B независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий.

Ввиду симметрии формулы (2.11) относительно событий A и B имеем

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(AB) = P(BA) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (2.14)$$

Если вероятность события B не зависит от наступления или ненаступления события A , т.е. $P_A(B) = P(B)$, то из (2.14) непосредственно следует, что

$$P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P_B(A) \text{ или } P_B(A) = P(A),$$

т.е. вероятность события A тоже не зависит от наступления или ненаступления события B . Таким образом, понятие независимости двух событий является взаимным.

Желая распространить формулу (2.13) на произведение трех и более событий, введем следующее понятие.

Определение 2.11. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если для всех комбинаций индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $k = 2, n$

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}). \quad (2.15)$$

Если условие (2.15) выполнено только при $k=2$, то события $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются попарно независимыми. Следует отметить, что парной независимости событий недостаточно для их совокупной независимости.

Пример 2.14. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие — первого сорта, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 75% небракованных изделий удовлетворяют первому сорту.

|| Через Ω обозначим множество всех изделий (пространство элементарных событий). Пусть U — максимальная алгебра, порожденная Ω ; $A, \bar{A} \in U$ — множества, состоящие целиком из небракованных и бракованных изделий соответственно; $B \in U$ — множество, состоящее из изделий первого сорта. По условию задачи $P(\bar{A}) = 0,04$, $P_A(B) = 0,75$. Следовательно, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,96$. Искомую вероятность находим по формуле (2.11):

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72. \quad ||$$

Пример 2.15. Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответы на три вопроса, предложенных ему экзаменатором.

|| Интерпретируя ответ на вопрос программы как элементарное событие, образуем из них пространство Ω , и пусть U — максимальная алгебра, порожденная Ω . Вспоминая, что каждый элемент ал-

гебры U суть некоторое событие, на этот раз решим задачу в терминах событий.

Вероятность того, что студент знает ответ на первый из предложенных ему вопросов (событие A), равна

$$P(A) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Вероятность того, что студент знает ответ на второй предложенный ему вопрос (событие B) при условии, что он знает также и ответ на первый, равна $P_A(B) = \frac{19}{24}$. Наконец, вероятность того, что студент знает ответ на третий вопрос (событие C) при условии, что он знает ответы на первый и второй вопросы, равна $P_{AB}(C) = \frac{18}{23}$. Отсюда по формуле (2.12) находим вероятность события ABC (студент знает ответы на все три предложенных ему вопроса):

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}. \quad \parallel$$

2.7. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть $\{\Omega, U, P\}$ — некоторое вероятностное пространство.

Определение 2.12. Система попарно несовместных событий $H_i \in U$, $i = \overline{1, n}$ образует полную группу событий, если

$$\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega \quad (2.16)$$

Если $A \in U$ — произвольное событие, то, используя разложение (2.16), событие A можно представить в виде объединения несовместных событий:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A H_i.$$

Отсюда, пользуясь теоремой сложения и умножения событий, получаем, что

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \quad (2.17)$$

Эта формула носит название «формулы полной вероятности» и имеет широкое применение в приложениях.

В прикладных задачах события H_i , $i = \overline{1, n}$ часто трактуются как некоторые гипотезы относительно возможных результатов эксперимента. Если до опыта вероятностями этих гипотез были $P(H_i)$, $i = \overline{1, n}$, а после опыта появилось событие A , то в результате происхо-

дит переоценка вероятностей этих гипотез и возникает необходимость знания значений условных вероятностей $P_A(H_i)$, $i = \overline{1, n}$. Для их определения воспользуемся тождеством (2.14), полагая в этом тождестве $B = H_i$. Имеем

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.18)$$

Полученная формула называется формулой Байеса или формулой гипотез.

Пример 2.16. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти: 1) вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика — стандартная; 2) вероятность того, что стандартная деталь извлечена из i -го ящика, $i = 1, 2, 3$.

|| 1) Решаем задачу в терминах событий. Гипотезы: H_i — деталь извлекается из i -го ящика, $i = 1, 2, 3$. Так как число ящиков 3, то вероятности гипотез $P(H_i) = \frac{1}{3}$. Пусть событие A состоит в извлечении стандартной детали. Найдем вероятности извлечения стандартной детали из каждого ящика, т.е. условные вероятности $P_{H_i}(A)$:

$$P_{H_1}(A) = \frac{15}{20} = 0,75; \quad P_{H_2}(A) = \frac{24}{30} = 0,8;$$

$$P_{H_3}(A) = \frac{6}{10}.$$

Искомую вероятность $P(A)$ находим по формуле полной вероятности (2.17):

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,6 \approx 0,72.$$

2) Для отыскания условных вероятностей гипотез $P_A(H_i)$ используем формулу Байеса (2.18):

$$P_A(H_1) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) : \frac{43}{60} = \frac{15}{43}; \quad P_A(H_2) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) : \frac{43}{60} = \frac{16}{43};$$

$$P_A(H_3) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \right) : \frac{43}{60} = \frac{12}{43}. \quad \parallel$$

Пример 2.17. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 радиоламп, из них 9 стан-

дартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

|| Обозначим через A событие, состоящее в том, что из первой коробки извлечена стандартная лампа. Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (гипотеза H_1 , ее вероятность $P(H_1) = \frac{9}{10} = 0,9$), либо нестандартная (гипотеза H_2 , ее вероятность $P(H_2) = \frac{1}{10} = 0,1$).

Если оправдалась гипотеза H_1 (в первую коробку переложена стандартная лампа), то вероятность извлечения стандартной лампы из первой коробки $P_{H_1}(A) = \frac{19}{21}$. Аналогично находим условную вероятность $P_{H_2}(A) = \frac{18}{21}$. Для отыскания $P(A)$ опять применяем формулу полной вероятности (2.18):

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9. \quad _$$

2.8. ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ

Изучение этого вопроса начнем с решения конкретной задачи.

Пример 2.18. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (события A) при одном залпе из всех орудий.

|| Введем следующие обозначения: событие A_k , $k = 1, 2, 3$ — попадание в цель k -м орудием; событие B_j , $j = 0, 1, 2, 3$ — j попаданий при одном залпе из всех орудий. События B_j легко выражаются через A_k и $\bar{A}_k$, $k = 1, 2, 3$:

$$B_0 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \text{ — промах;}$$

$$B_1 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \text{ — одно попадание;}$$

$$B_2 = A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \text{ — два попадания;}$$

$$B_3 = A_1 A_2 A_3 \text{ — три попадания.}$$

Очевидно, событие $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ означает хотя бы одно попадание при одном залпе из всех орудий. Так как события B_1 , B_2 , B_3 несовместны, то $P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$. Учитывая, что

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,9 = 0,1$$

и события $A_k, \bar{A}_k, k=1, 2, 3$ независимы в совокупности, подсчитаем вероятности $P(B_j)$:

$$P(B_1) = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,092;$$

$$P(B_2) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,398;$$

$$P(B_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 0,092 + 0,398 + 0,504 = 0,994.$$

Тот же результат можно получить и другим, более коротким путем. Действительно, так как $\bigcup_{j=0}^3 B_j = \Omega$ — достоверное событие, то $A = \bigcup_{j=1}^3 B_j = \Omega \setminus B_0 = \Omega \setminus (\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$. Следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994. \quad \square$$

Пусть в результате некоторого испытания могут появиться не более n независимых в совокупности событий $A_k, k=1, n$, причем предполагается, что известны вероятности появления каждого из этих событий:

$$P(A_k) = p_k, \quad P(\bar{A}_k) = 1 - P(A_k) = 1 - p_k = q_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Теорема 2.3. Вероятность появления в одном испытании хотя бы одного из n независимых в совокупности событий $A_k, k=1, n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий, т.е.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n. \quad (2.19)$$

Введем обозначения: событие A — появление при одном испытании хотя бы одного из n событий $A_k, k=1, n$; $B_j, j=0, n$ — появление ровно j событий, в частности

$$B_0 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$$

означает наступление противоположных событий. Так как $\bigcup_{j=0}^n B_j = \Omega$ — достоверное событие, то событие

$$A = \Omega \setminus B_0 = \bigcup_{j=1}^n B_j$$

означает как раз наступление хотя бы одного из событий $A_k, k=1, n$. Так как противоположные события $\bar{A}_k, k=1, n$ (как и исходные события A_k) в совокупности независимы, то

$$P(A) = P(\Omega) - \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n. \quad \parallel$$

Формула (2.19) упрощается, если события A_k имеют равные вероятности. Пусть, например, $P(A_k) = p$ и, следовательно, $P(\bar{A}_k) = 1 - p = q$. Тогда формула (2.19) приобретает более простой вид:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (2.20)$$

Пример 2.19. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной из них появится 6 очков (событие A)?

$\parallel$ Пусть событие A_k означает выпадение 6 очков на k -й игральной кости, $k = 1, 2, 3$. Так как

$$P(A_k) = \frac{1}{6} \text{ и } P(\bar{A}_k) = \frac{5}{6}, \quad k = 1, 2, 3,$$

то по формуле (2.20)

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}. \quad \parallel$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Проверить следующие соотношения между событиями:

а) $A \cup (AB) = A$; б) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;

в) $(A \cup B) = \bar{A} \cap \bar{B}$ и $(A \cap B) = \bar{A} \cup \bar{B}$;

г) $A \setminus B = \begin{cases} A\bar{B}, \\ A \setminus (AB), \\ (A \cup B) \setminus B. \end{cases}$

2.2. Даны две последовательности событий:

$$A_n = \left\{x: 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}\right\}; \quad B_n = \left\{x: 1 \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}\right\}.$$

Доказать, что: а) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$; б) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{x: 1 \leq x \leq 2\}$.

2.3. Команда по шахматам состоит из трех человек. Событие A_k — выигрыш k -го члена команды, $k = 1, 2, 3$. С помощью A_k и $\bar{A}_k$ записать события: A — выиграли все члены команды; B — выиграл только один; C — выиграли хотя бы два; D — проиграли все.

2.4. Пусть событие A_k , $k = \overline{1, 4}$ заключается в том, что лампочка с номером k исправна. Записать через A_k условие того, что в цепи, изображенной на рис. 2.2: а) течет ток (событие A); б) не течет ток (событие $\bar{A}$).

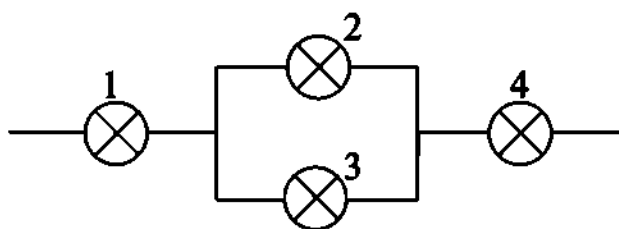


Рис. 2.2

2.5. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 50. найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 2.

2.6. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет нечетное число очков.

2.7. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

2.8. Из полного набора костей домино (28 косточек) наудачу вынимается одна. Найти вероятность следующих событий:

- а) на вынутой косточке — шесть очков;
- б) на вынутой косточке — пять очков или четыре очка;
- в) сумма вынутых очков равна 7.

2.9. Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов. Определить вероятность выигрыша на один билет.

2.10. В учебной группе 25 студентов. Из них 8 человек учатся отлично, 10 — хорошо, 5 — удовлетворительно, 2 — неудовлетворительно. Для проверки из учебной группы вызвали трех студентов. Какова вероятность того, что это: а) отличники; б) хорошисты; в) два студента учатся неудовлетворительно и один удовлетворительно?

2.11. Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

2.12. Два самолета должны прибыть на аэродром между 8 и 9 часами. Время стоянки на аэродроме 20 минут. Какова вероятность их встречи на аэродроме?

2.13. Противник в течение часа делает один десятиминутный артиллерийский налет на участок шоссе. Какова вероятность избежать налета, если время преодоления участка 5 минут?

2.14. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10, из них 3 детали — стандартные; во втором — 15, из них 6 — стандартные. Из

каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

2.15. Для первого из двух химических реакторов вероятность бесперебойной работы в течение одного часа составляет 0,75, а для второго — 0,8. Какова вероятность того, что оба реактора будут бесперебойно работать на протяжении 3 часов?

2.16. Предприятие изготавливает 95% стандартных изделий, причем из них 86% — первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, взятое наудачу из крупной партии, изготовленной на этом предприятии, окажется изделием первого сорта.

2.17. В студии телевидения 3 телевизионные камеры. Вероятность включения каждой в данный момент равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент времени включена хотя бы одна камера.

2.18. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Считая, что событие A может появиться в каждом из двух испытаний с равной вероятностью, найти вероятность появления этого события в одном испытании.

2.19. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них — по теории вероятности. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется учебником по теории вероятности.

2.20. Вероятности нормальной работы лампочек, изображенных на рис. 2.2 (см. задачу 2.4), приведены в следующей таблице:

Номер лампочки	1	2	3	4
Вероятность P	0,8	0,6	0,4	0,9

Найти вероятность того, что в цепи: а) течет ток; б) не течет ток.

2.21. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

2.22. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июне равно пяти. Найти вероятность того, что первого, второго и третьего июня будет ясная погода.

2.23. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика — стандартная.

2.24. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит 60% высококачественных деталей, а второй — 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась высокого качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена: а) первым автоматом; б) вторым автоматом.

2.25. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 — новые. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИСПЫТАНИЙ

3.1. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим два вероятностных пространства

$$\{\Omega^{(1)}, U^{(1)}, P^{(1)}\} \text{ и } \{\Omega^{(2)}, U^{(2)}, P^{(2)}\},$$

порожденных двумя независимыми случайными экспериментами, причем их элементарным событиям

$$\omega_i^{(1)} \in \Omega^{(1)} \text{ и } \omega_k^{(2)} \in \Omega^{(2)}$$

соответствуют вероятности $P^{(1)}(\omega_i^{(1)})$ и $P^{(2)}(\omega_k^{(2)})$. По аналогии с пунктом 1.3, где было введено прямое произведение множеств, определим прямое произведение вероятностных пространств.

Определение 3.1. Прямым произведением вероятностных пространств $\{\Omega^{(1)}, U^{(1)}, P^{(1)}\}$ и $\{\Omega^{(2)}, U^{(2)}, P^{(2)}\}$ называется пространство $\{\Omega, U, P\}$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар вида $\omega = (\omega_i^{(1)}, \omega_k^{(2)}) \in \Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, причем вероятность элемента $\omega \in \Omega$ определяется по формуле

$$P(\omega) = P(\omega_i^{(1)}, \omega_k^{(2)}) = P^{(1)}(\omega_i^{(1)}) \cdot P^{(2)}(\omega_k^{(2)}). \quad (3.1)$$

На алгебре U вероятность P определим формулой

$$P(A) = \sum_{(\omega_i^{(1)}, \omega_k^{(2)}) \in A} P^{(1)}(\omega_i^{(1)}) \cdot P^{(2)}(\omega_k^{(2)}), \quad A \in U. \quad (3.2)$$

Вследствие аддитивности вероятностей $P^{(1)}(\omega_i^{(1)})$ и $P^{(2)}(\omega_k^{(2)})$ из формулы (3.2) следует аддитивность и введенной вероятности P . Проверим, что $P(\Omega) = 1$. Так как

$$\Omega = \{(\omega_i^{(1)}, \omega_k^{(2)}) : \omega_i^{(1)} \in \Omega^{(1)}, \omega_k^{(2)} \in \Omega^{(2)}\},$$

то

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{\substack{\omega_i^{(1)} \in \Omega^{(1)} \\ \omega_k^{(2)} \in \Omega^{(2)}}} P^{(1)}(\omega_i^{(1)}) \cdot P^{(2)}(\omega_k^{(2)}) = \\ &= \sum_{\omega_i^{(1)} \in \Omega^{(1)}} P^{(1)}(\omega_i^{(1)}) \cdot \sum_{\omega_k^{(2)} \in \Omega^{(2)}} P^{(2)}(\omega_k^{(2)}) = p^{(1)}(\Omega^{(1)}) \cdot p^{(2)}(\Omega^{(2)}) = 1. \end{aligned}$$

По аналогии можно ввести прямое произведение трех и более вероятностных пространств.

Рассмотрим произведение n одинаковых вероятностных пространств $\{\Omega, U, P\}$ с конечным множеством элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, где для удобства элементарные исходы обозначены через i . Вероятности $P(i) = p_i$, $i = \overline{1, N}$ известны, причем $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Тогда согласно определению 3.1

$$\Omega^{(n)} = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, n}\}$$

представляет прямое произведение n «экземпляров» пространств Ω . Сначала определим вероятности на его элементарных событиях $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, полагая

$$P^{(n)}(\omega) = P(i_1) \cdot P(i_2) \cdots P(i_n) = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_n}. \quad (3.3)$$

Тогда эти вероятности однозначно определяют вероятности на любых подмножествах $A \in \Omega^{(n)}$:

$$P^{(n)}(A) = \sum_{\omega \in A} P^{(n)}(\omega), \quad A \in \Omega^{(n)}. \quad (3.4)$$

Пример 3.1. Построить вероятностное пространство, соответствующее одновременному подбрасыванию двух игральных костей.

|| Согласно примеру 2.2 вероятностное пространство $\{\Omega, U, P\}$, соответствующее подбрасыванию одной игральной кости, описывается следующим образом: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — его пространство элементарных событий, где $\omega_k = k$ означает появление на верхней грани цифры k , причем $P(k) = \frac{1}{6}$, $\forall k, k = \overline{1, 6}$. Следовательно, согласно результатам пункта 3.1 искомое вероятностное пространство $\{\Omega^{(2)}, U^{(2)}, P^{(2)}\}$ можно представить как прямое произведение пространств, порожденных подбрасыванием одной игральной кости. Поэтому

$$\Omega^{(2)} = \Omega \times \Omega = \{(i_1, i_2) : i_1, i_2 = \overline{1, 6}\} \text{ и}$$

$$P^{(2)}(i_1, i_2) = P(i_1) \cdot P(i_2) = \frac{1}{36}. \quad \text{||}$$

3.2. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Предположим, что мы можем осуществить одно и то же испытание при одинаковых условиях сколько угодно раз. При этом, естественно, мы получаем каждый раз некоторые вероятностные пространства, порожденные этими испытаниями.

Определение 3.2. Испытания называются *независимыми*, если в результате этих испытаний получаются одни и те же вероятностные пространства.

Обозначим через $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ пространства исходов, порожденные одним испытанием. Тогда в результате последовательного осуществления n таких независимых испытаний мы получим пространство $\Omega^{(n)}$, которое, очевидно, представляет прямое произведение пространств исходов Ω :

$$\Omega^{(n)} = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega = \left\{ \omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, n} \right\}.$$

При этом вероятность $P(k) = p_k$, $k = \overline{1, N}$, определенная на элементарных исходах пространства Ω , индуцирует соответствующую вероятность $P^{(n)}$:

$$P^{(n)}(\omega) = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_n}, \quad \omega \in \Omega^{(n)}.$$

3.3. БИНОМИАЛЬНАЯ СХЕМА. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

В этом пункте подробно рассмотрим случай эксперимента с двумя исходами: $\Omega = \{1, 0\}$. Здесь элементарный исход «1» обычно называют «удачей», «0» — соответственно, «неудачей». Предполагаются известными их вероятности: $P(1) = p$, $P(0) = 1 - p = q$. А теперь решим следующую важную задачу.

Пусть известна вероятность наступления события A в одном испытании, равная p . Предполагая испытания независимыми, найти вероятность наступления события A k раз в n испытаниях.

Искомую вероятность обозначим через $P_n(k)$. Считая наступление события A «удачей» = «1», ненаступление — «неудачей» = «0», построим вероятностное пространство $\Omega^{(n)}$ с двумя исходами, возникшее в результате проведения n независимых испытаний:

$$\Omega^{(n)} = \left\{ \omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_1, i_2 = 0, 1 \right\}.$$

Обозначим через $B_k \in \Omega^{(n)}$ подмножество, содержащее только те исходы ω , в которых «1» повторяется k раз (что соответствует появлению события A k раз в n испытаниях). Если $\omega \in B_k$, то, используя формулу (3.3), получим

$$P^{(n)}(\omega) = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n-k) \text{ раз}} = p^k q^{n-k},$$

ибо по условию $P(A) = P(1) = p$, $P(\bar{A}) = P(0) = 1 - p = q$. Так как в последовательности длиной n единицу «1» k раз можно разместить C_n^k различными способами, то мощность $n(B_k) = C_n^k$. Следовательно,

$$P_n(k) = P^{(n)}(B_k) = \sum_{\omega \in B_k} P^{(n)}(\omega) = \sum_{\omega \in B_k} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Итак,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.5)$$

Эта формула носит название формулы Бернулли или формулы биномиального распределения вероятности. Второе название этой формулы оправдывается тем, что ее правая часть представляет общий член разложения следующего бинома (см. формулу (1.7)):

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.6)$$

Вспоминая, что $q + p = 1$, из формулы (3.6) непосредственно следует, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1. \quad (3.7)$$

Замечание. Формулу (3.7) можно было получить исходя из других соображений. Например, если учесть, что объединение

$$\bigcup_{k=0}^n B_k = \Omega^{(n)} \quad (3.8)$$

достоверное событие и его слагаемые суть несовместные события, то из представления (3.8) немедленно следует (3.7). Действительно,

$$\begin{aligned} P^{(k)}\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) &= \sum_{k=0}^n P^{(n)}(B_k) = \sum_{k=0}^n P_n(k) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = P^{(n)}(\Omega^{(n)}) = 1. \end{aligned}$$

Пример 3.3. Вероятность того, что расход воды на химическом предприятии за одни сутки не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход воды в течение 4 суток не превысит нормы.

|| По условию задачи $p = 0,75$, $n = 6$, $k = 4$. Учитывая, что $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$, искомую вероятность $P_6(4)$ находим по формуле Бернулли (3.5):

$$P_6(4) = C_6^4 (0,75)^4 (0,25)^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75^4) (0,25)^2 = 0,3. \quad _||$$

Пример 3.4. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): а) три партии из четырех или

пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

|| Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша каждой партии одинаковы и равны $p = q = \frac{1}{2}$.

а) Вероятность выигрыша трех партий из четырех $P_4(3) = C_4^3 \cdot \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Вероятность выигрыша пяти партий из восьми $P_8(5) = C_8^5 \cdot \frac{1}{2}^5 \cdot \frac{1}{2}^3 = \frac{7}{32}$.

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех, чем пять партий из восьми.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех складывается из суммы

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

Аналогично находим вероятность выигрыша не менее пяти партий из восьми:

$$\begin{aligned} P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) &= C_8^5 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^3} + C_8^6 \cdot \frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{2^2} + C_8^7 \cdot \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{2} + \\ &+ C_8^8 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^8} (C_8^3 + C_8^2 + C_8^1 + 1) = \frac{93}{256}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми. ||

3.4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В БИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЕ

Вычисление вероятностей $P_n(k)$ становится затруднительным при достаточно больших значениях параметров n и k . Эти трудности значительно возрастают, когда возникает необходимость суммировать эти вероятности, т.е. приходится вычислять вероятности

$$P_n(a < k < b) = \sum_{a < k < b} P_n(k).$$

Вычисления также сильно усложняются, когда рассматриваются события с малыми вероятностями p (или q). Такие события называются редкими.

Ниже будут получены асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$, которые сильно упрощают вычисления.

Теорема 3.1 (теорема Пуассона). Если $np \rightarrow \lambda$ при $n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$, то

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad n \rightarrow \infty \text{ и } p \rightarrow 0 \text{ для } \forall k, k=0,1,2,\dots$$

|| Формулу (3.5) преобразуем, положив $np = \lambda_n$ (или $p = \frac{\lambda_n}{n}$):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n.$$

Так как $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $1 - \frac{i}{n} \rightarrow 1$, $\forall i = \overline{1, k-1}$, $1 - \frac{\lambda_n}{n} \rightarrow 1$ и $\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$, $n \rightarrow \infty$, то $P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P_\lambda(k)$, $n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$. ||

Таким образом, при достаточно больших n для вычисления вероятностей редких событий (p мало) можно воспользоваться приближенной формулой

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) называется формулой Пуассона, и эта формула дает хорошие приближения, если произведение $np = \lambda_n$ не превосходит 10. Для вычисления значений функции

$$P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

(она тоже называется функцией Пуассона) существует специальная таблица, которая приведена во многих учебниках и задачниках по теории вероятностей (см. приложение 1). Если значение q мало, то формулу Пуассона применяют для отыскания искомых величин противоположных событий (неудача).

Пример 3.5. Вероятность изготовления нестандартных изделий равна 0,003. Найти вероятность, что среди 2000 изделий окажется пять нестандартных.

|| Здесь речь идет о редком событии, ибо $p = 0,003$. По условию $n = 2000$, $k = 5$ и $\lambda = np = 2000 \cdot 0,003 = 6$. Значения всех трех параметров удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Поэтому для вычисления вероятности $P_{2000}(5)$ применяем формулу Пуассона (3.9):

$$P_{2000}(5) = \frac{6^5}{5!} e^{-6} \approx 0,1606. \quad ||$$

Если же вероятность p (следовательно, и q) события A значительно разнится от 0, то использование формулы Пуассона приводит

к ошибочным результатам. В этом случае обычно применяют формулу Муавра—Лапласа (локальную или интегральную).

Теорема 3.2 (локальная теорема Муавра—Лапласа). Если вероятность p , $0 < p < 1$ наступления события A при каждом из независимых испытаний постоянна и величина

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad (3.10)$$

равномерно ограничена по k и n (т.е. $\exists a, b \in R$, что $-\infty < a < x_k < b < \infty$), то для вычисления вероятности $P_n(k)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$P_n(k) = \rho(x_k) / \sqrt{npq} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.12)$$

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко, поэтому ее доказательство опускаем, отсылая читателя к другим руководствам (см., например, [4, гл. IV, § 3]).

При вычислении $P_n(k)$ по формуле (3.11) вторым слагаемым (ввиду его малости) пренебрегают. Поэтому полагают

$$P_n(k) \approx \rho(x_k) / \sqrt{npq}. \quad (3.13)$$

Эта формула дает хорошие приближения при $p = q = \frac{1}{2}$, а число испытаний n достаточно велико, например $n > 100$, $npq > 20$. Для значений функции (3.12) составлена таблица (см. приложение 2). Укажем основные свойства этой функции, которые необходимо учитывать при пользовании таблицей.

1. Функция $\rho(x)$ является четной, т.е. $\rho(-x) = \rho(x)$. Поэтому в таблице даны значения только для положительных значений аргумента.

2. В интервале $[0, \infty)$ функция $\rho(x)$ монотонно убывает, причем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2/2}} = 0.$$

3. Так как уже значение $\rho(5) = 0,000005$, т.е. мало, то при $x > 5$ полагают $\rho(x) \equiv 0$. Поэтому в таблице приведены значения функции $\rho(x)$ только для $x \in [0, 5]$.

Пример 3.6. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность поражения мишени 345 раз при 600 выстрелах.

|| Здесь $n=600$, $k=345$, $p=0,6$, $q=1-0,6=0,4$. Значение аргумента x_k находим по формуле (3.10):

$$x_{345} = (345 - 600 \cdot 0,6) / \sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = -\frac{15}{12} = -1,25.$$

Так как по таблице $\rho(1,25) = 0,1826$, то искомую вероятность окончательно находим по формуле (3.13):

$$p_{600}(345) \approx 0,1826 / \sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 0,0152. \quad ||$$

На практике часто приходится решать задачи отыскания вероятности того, что число появления некоторого события в n независимых испытаниях заключено на некотором отрезке: $k_1^{(n)} \leq k \leq k_2^{(n)}$. Эта вероятность обозначается через $P(k_1^{(n)} \leq k \leq k_2^{(n)})$, и для ее вычисления используется интегральная теорема Муавра — Лапласа.

Теорема 3.3 (интегральная теорема Муавра — Лапласа). Если вероятность p , $0 < p < 1$ наступления события A при каждом из n независимых испытаний постоянна, то

$$P_n\left(a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно по a и b , $-\infty < a \leq b < \infty$.

|| Вспоминая, что $x_k = (k-np)/\sqrt{npq}$, введем обозначения: $k_1^{(n)} = a\sqrt{npq} + np$, $k_2^{(n)} = b\sqrt{npq} + np$. Тогда вероятность $P_n(a \leq x_k \leq b) = P_n(k_1^{(n)} \leq k \leq k_2^{(n)}) = \sum_{k_1^{(n)} \leq k \leq k_2^{(n)}} P_n(k)$. Заменяя в этой сумме слагаемые $P_n(k)$ по формуле (3.11) и учитывая, что $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k_1^{(n)} \leq k \leq k_2^{(n)}} P_n(k) &= \sum_{x_k \in [a, b]} \left(\rho(x_k) \Delta x_k + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Delta x_k \right) = \\ &= S_n + (b-a) \cdot o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Функция $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [a, b]$ — непрерывная функция. Поэтому существует предел интегральных сумм S_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in [a, b]} \rho(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \rho(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (b-a) \cdot o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = (b-a) \cdot 0 = 0. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} P_n(k_1^{(n)} \leq k \leq k_2^{(n)}) &= P_n\left(a \leq x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Формула (3.14) упрощается, если ввести функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.16)$$

Тогда, например,

$$\begin{aligned} P_n(x_1 \leq x \leq x_2) &= P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \\ &= \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right). \end{aligned} \quad (3.16)^*$$

Для значений функции $\Phi(x)$ тоже составлена таблица (см. приложение 3). Укажем некоторые свойства этой функции — их знание облегчит пользование таблицей.

1. Функция $\Phi(x)$ нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Поэтому в таблице приведены значения только положительных значений аргумента.

2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает.

3. $\Phi(\infty) = 0,5$.

4. Так как уже $\Phi(5) = 0,499997 \approx 0,5$, то таблица составлена для $|x| \leq 5$.

|| 1) В интеграле $\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ сделаем замену переменных, положив $t = -\tau$. Тогда

$$\Phi(-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = -\Phi(x).$$

2) Доказательство утверждения этого пункта следует из того, что подынтегральная функция положительна и интеграл — аддитивная функция интервала интегрирования. Действительно, если $x_1 < x_2$, то

$$\Phi(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x_1).$$

3) Известно, что интеграл Эйлера—Пуассона $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (см.: [1, гл. 3, § 4]). Поэтому

$$\Phi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}} = 0,5. \quad \square$$

Положив в формуле (3.16)* $k_1 = -r + np$ и $k_2 = r + np$, где $r > 0$ — некоторое положительное число, и учитывая, что $\Phi(x)$ — нечетная функция, имеем

$$P_n(-r + np \leq k \leq r + np) = P_n(|k - np| \leq r) \approx \Phi\left(\frac{r + np - np}{\sqrt{npq}}\right) - \\ - \Phi\left(\frac{-r + np - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-r}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{npq}}\right).$$

Полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Следствие. Если вероятность p , $0 < p < 1$ наступления события A при каждом из n независимых испытаний постоянна, то вероятность того, что абсолютная величина отклонения числа наступления события A в n испытаниях от произведения np не превзойдет числа $r > 0$, находится по формуле

$$P_n(|k - np| \leq r) \approx 2\Phi\left(r/\sqrt{npq}\right). \quad (3.17)$$

Неравенства $\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$ и $|k - np| < n\varepsilon$ равносильны. Поэтому

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P_n(|k - np| < n\varepsilon) \approx 2\Phi\left(n\varepsilon/\sqrt{npq}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Итак, получен следующий важный результат.

Теорема 3.4 (теорема Бернулли). В условиях теоремы 3.3 вероятность того, что абсолютная величина отклонения относительной частоты события A в n независимых испытаниях от его вероятности не превзойдет числа $\varepsilon > 0$ (возможно сколь угодно малого), находится по формуле

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad (3.18)$$

причем $P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\rightarrow 1, n\rightarrow\infty$.

Следовательно, $P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=1-P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\rightarrow 0, n\rightarrow\infty$.

Пример 3.7. Согласно статистике вероятность рождения мальчика 0,52. Найти вероятность того, что среди 500 новорожденных окажется:

- 1) от 240 до 300 мальчиков;
- 2) от 230 до 250 девочек.

|| 1) Прежде всего, используя формулу (3.10), найдем значения x_1 и x_2 , соответствующие параметрам $n=500$, $p=0,52$, $q=0,48$, $k_1=240$, $k_2=300$:

$$x_1=(240-500\cdot 0,52)/\sqrt{500\cdot 0,52\cdot 0,48}\approx -1,7903;$$

$$x_2=(300-500\cdot 0,52)/\sqrt{500\cdot 0,52\cdot 0,48}\approx 3,5806.$$

Затем из таблицы находим значения функции $\Phi(x)$ в точках x_1 и x_2 : $\Phi(-1,7903)=-\Phi(1,7903)=-0,4633$; $\Phi(3,5806)=0,4998$. Наконец, искомую вероятность находим по формуле (3.16)*:

$$P_{500}(240\leq k\leq 300)=0,4998+0,4633=0,9631.$$

2) В этом случае $k_1=230$, $k_2=250$. Так как неравенства $230\leq k\leq 250$ и $|k-240|\leq 10$ равносильны, то для вычисления искомой вероятности можно воспользоваться формулой (3.17):

$$P_{500}(|k-240|\leq 10)\approx 2\Phi(10/11,1714)=0,6293. \quad \text{||}$$

Пример 3.8. Вероятность того, что покупателю нужна мужская обувь 41-го размера, равна 0,4. Найти:

1) вероятность того, что среди 1000 таких окажется: а) не менее 420; б) от 485 до 415;

2) вероятность того, что отклонение доли покупателей от вероятности по абсолютной величине не превзойдет числа $\varepsilon=0,03$.

|| 1) а) Здесь речь идет о вычислении вероятности того, что от 420 до 1000 покупателей нуждаются в мужской обуви 41-го размера. Числовые значения параметров таковы: $n=1000$, $p=0,4$, $q=0,6$, $k_1=420$, $k_2=1000$. Для нахождения значений аргументов x_1 и x_2 используем формулу (3.10):

$$x_1 = (420 - 1000 \cdot 0,4) / \sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 5 / \sqrt{15} \approx 1,291;$$

$$x_2 = (1000 - 1000 \cdot 0,4) / \sqrt{240} = 150 / \sqrt{15} \approx 38,7298.$$

Табличные значения функции $\Phi(x)$ в найденных точках x_1 и x_2 следующие: $\Phi(1,291) = 0,4016$ и $\Phi(38,7298) = 0,5$. Искомую вероятность вычисляем по формуле (3.16)*:

$$P_{1000}(k \geq 420) = P_{1000}(420 \leq k \leq 1000) = 0,5 - 0,4016 = 0,0984.$$

б) В этом случае параметры $k_1 = 385$, $k_2 = 415$ и речь идет о вычислении вероятности $P_{1000}(|k - 400| \leq 15)$. Для ее отыскания используем формулу (3.17) с параметром $r = 15$:

$$P_{1000}(|k - 400| \leq 15) \approx 2\Phi\left(15 / \sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = 0,6671.$$

2) Искомую вероятность находим по формуле (3.18), где вместо ϵ предварительно нужно положить 0,03:

$$\begin{aligned} P_{1000}\left(\left|\frac{k}{1000} - 0,4\right| < 0,03\right) &\approx 2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0,4 \cdot 0,6}}\right) = \\ &= 2\Phi(1,9365) = 0,9472. \quad \square \end{aligned}$$

3.5. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СХЕМА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

В этом пункте мы еще раз возвращаемся к вопросу о независимых испытаниях уже с произвольным числом исходов и пусть $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ — результат одного эксперимента, где исходам « i » отвечают вероятности $p(i) = p_i$. Обозначим через $\Omega^{(n)} = \{\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k = \overline{1, N}; k = \overline{1, n}\}$ пространство элементарных исходов, порожденное n независимыми испытаниями; k_i — число наступления события « i », $i = \overline{1, N}$ в n испытаниях; найдем вероятность $P_n(k_1, k_2, \dots, k_N)$ того, что в n испытаниях событие « i » произойдет ровно k_i раз, $i = \overline{1, N}$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$. С этой целью рассмотрим только те элементарные события $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, где событие «1» встречается k_1 раз, «2» — k_2 раз и т.д. Их совокупность обозначим через B . Так как испытания независимы, то вероятность такого события $\omega \in B$ находим по формуле (3.3):

$$\begin{aligned} P^{(n)}(\omega) &= \underbrace{p(1)p(1)\dots p(1)}_{k_1 \text{ раз}} \cdot \underbrace{p(2)p(2)\dots p(2)}_{k_2 \text{ раз}} \cdot \dots \underbrace{p(N)p(N)\dots p(N)}_{k_N \text{ раз}} = \\ &= p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_N^{k_N}. \end{aligned}$$

Число таких элементарных событий ω , т.е. мощность $n(B)$, можно найти следующим образом. Число «1», занимающее в последовательности длины n k_1 мест, можно расположить $C_n^{k_1}$ способами; число «2», занимающее в последовательности длины $(n - k_1)$ k_2 мест, можно разместить $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами и т.д. Следовательно, общее число таких элементарных событий будет

$$n(B) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{n-k_1-\dots-k_{N-1}}^{k_N} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_N!}.$$

Так как искомая вероятность равна вероятности $P^{(n)}(B)$, то

$$\begin{aligned} P_n(k_1, k_2, \dots, k_N) &= P^{(n)}(B) = \sum_{\omega \in B} P^{(n)}(\omega) = \\ &= n(B) p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_N!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Формула (3.19) определяет так называемую полиномиальную схему распределения вероятности. Нетрудно заметить, что при $N = 2$ из формулы (3.19) следует биномиальная схема с параметрами $p_1 = p$; $p_2 = 1 - p = q$; $k_1 = k$; $k_2 = n - k$.

3.6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

В общем случае последовательность из n испытаний (не обязательно независимых) можно рассматривать как множество элементарных событий вида

$$\Omega^{(n)} = \left\{ \omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, n} \right\}, \quad (3.20)$$

где элементарное событие $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ рассматривается как последовательность в n испытаниях, каждое из которых имеет, в свою очередь, N несовместных исходов: $1, 2, \dots, N$. На элементарных событиях ω определим вероятность, положив

$$P(\omega) = p(i_1) \cdot p_{i_1}(i_2) \cdots p_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_n), \quad (3.21)$$

где в произведении фигурируют положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i_k=1}^N p_{i_1 \dots i_{k-1}}(i_k) = 1, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.22)$$

Вероятность (3.21) однозначно порождает вероятность и на множествах из $\Omega^{(n)}$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad A \subset \Omega^{(n)}. \quad (3.23)$$

Осталось только проверить, что $P(\Omega^{(n)})=1$. Из соотношений (3.23), (3.21) и (3.22) следует, что

$$\begin{aligned} P(\Omega^{(n)}) &= \sum_{\omega \in \Omega^{(n)}} P(\omega) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N p(i_1) p_{i_1}(i_2) \cdots p_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_n) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^N p(i_1) \cdots p_{i_1 \dots i_{n-2}}(i_{n-1}) \sum_{i_n=1}^N p_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_n) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-2}=1}^N p(i_1) \cdots p_{i_1 \dots i_{n-2}}(i_{n-1}) \sum_{i_{n-1}=1}^N p_{i_1 \dots i_{n-2}}(i_{n-1}) = \cdots = \sum_{i_1=1}^N p(i_1) = 1. \end{aligned}$$

Построенное вероятностное пространство $\{\Omega^{(n)}, U, P\}$ является математической моделью последовательности из n испытаний, где $p(i_k)$ — вероятности несовместных исходов, а $p_{i_1 \dots i_{k-1}}(i_k)$ — их условные вероятности, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$.

Пример 3.9. В трех урнах лежат одинаковые шары, отличающиеся друг от друга только цветом: в первой урне находится 3 белых и 2 черных шара; во второй — 1 белый и 3 черных и в третьей — 2 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается во вторую. Затем наудачу извлекается один шар из второй урны и перекладывается в третью и, наконец, случайно извлекается один шар из третьей урны и перекладывается обратно в первую.

1. Построить математическую модель, соответствующую произведенным 3 испытаниям по перекладыванию шаров из одной урны в другую.

2. Найти вероятность того, что в результате перекладываний в первой урне окажется k белых шаров (событие B_k , $k = 2, 3, 4$).

|| 1. В задаче речь идет о произведении трех последовательных испытаний (извлечение шара из k -й урны, $k = 1, 2, 3$) с двумя исходами при каждом испытании (извлечение белого шара — исход «1» = «удача»; извлечение черного шара — исход «0» = «неудача»). Согласно результатам последнего пункта (здесь мы имеем дело с зависимыми испытаниями) пространство элементарных событий $\Omega^{(3)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega^{(3)} &= \{\omega = (i_1, i_2, i_3) : i_1, i_2, i_3 = 0, 1\} = \\ &= \{(111), (110), (101), (100), (011), (010), (001), (000)\}, \end{aligned}$$

где, например, элементарное событие (110) обозначает, что в результате трех последовательных испытаний совершены следующие три действия: из первой урны извлечен белый шар и он переложен во вторую урну, затем в третью урну переложен опять белый шар и, наконец, в первую урну переложен черный шар. Так как испытания

зависимы, то вероятности элементарных событий находим по формуле (3.21), где нужно положить $n=3$, $N=2$:

$$P(\omega) = P((i_1 i_2 i_3)) = p(i_1) \cdot p_{i_1}(i_2) \cdot p_{i_1 i_2}(i_3).$$

Следовательно, $P((111)) = p(1) \cdot p_1(1) \cdot p_{11}(1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$, где $p(1) = \frac{3}{5}$ выражает величину вероятности извлечения белого шара из первой урны; $p_1(1) = \frac{2}{5}$ — вероятность (условную) извлечения белого шара из второй урны при условии, что туда уж переложено из первой урны белый шар; $p_{11}(1) = \frac{3}{5}$ — вероятность (условную) извлечения белого шара из третьей урны при условии, что в эту урну переложили белый шар из второй урны. Аналогично находятся вероятности остальных элементарных событий:

$$p((110)) = \frac{12}{125}; \quad p((101)) = \frac{18}{125}; \quad p((100)) = \frac{27}{125}; \quad p((011)) = \frac{16}{125};$$

$$p((010)) = \frac{4}{125}; \quad p((001)) = \frac{16}{125}; \quad p((000)) = \frac{24}{125}.$$

2. Множества B_k , $k=2, 3, 4$ через элементарные события имеют следующие представления:

- $B_2 = \{(110), (100)\}$;
- $B_3 = \{(111), (101), (010), (000)\}$;
- $B_4 = \{(011), (001)\}$.

Им соответствуют вероятности:

$$P(B_2) = P((110)) + P((100)) = \frac{12}{125} + \frac{27}{125} = \frac{39}{125}; \quad P(B_3) = \frac{64}{125}; \quad P(B_4) = \frac{22}{125}.$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующее заключение: предположение, что в результате переключений в первой урне окажется 3 белых шара, является наиболее вероятным, а 4 белых шара — маловероятным. ||

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Пусть всхожесть пшеницы составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут 5?

3.2. Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность, что из 5 случаев эта колония микроорганизмов появится не менее 4 раз?

3.3. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент:

- а) включено 4 мотора;
- б) включены все моторы;
- в) выключены все моторы.

3.4. В семье десять детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье:

- а) пять мальчиков;
- б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

3.5. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы?

3.6. Вероятность изготовления бракованных деталей равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 3000 деталей окажется бракованных:

- а) четыре;
- б) не более четырех.

3.7. Новогодняя елка освещена 500 маленькими цветными лампочками. Вероятность исправной работы каждой лампочки в течение некоторого времени t постоянна и равна 0,996. Найти вероятность того, что за это время перегорят 5 лампочек.

3.8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность 375 попаданий при 600 выстрелах.

3.9. По статистике вероятность рождения девочки 0,48. Какова вероятность того, что среди 500 новорожденных окажется 270 мальчиков?

3.10. Всхожесть семян пшеницы 90%. Найти вероятность того, что из 900 посеянных семян:

- а) не взойдет 100;
- б) взойдет не менее 820.

3.11. Игральная кость бросается 6000 раз. Найти вероятность того, что число появлений «шестерки» заключено:

- а) между 980 и 1060;
- б) между 950 и 1050.

3.12. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 5 телевизоров потребуют ремонта:

- а) не более одного;
- б) хотя бы один.

3.13. Вероятность поражения цели при одном выстреле 0,4. Найти вероятности следующих событий:

- 1) при 8 выстрелах цель будет поражена 5 раз;
- 2) при 250 выстрелах цель будет поражена:
- а) не менее 90, но не более 105 раз;

б) не менее 95, но не более 105 раз;

в) не менее 95 раз;

г) не более 105 раз.

3.14. Автоматическая телефонная станция обслуживает 2000 телефонных точек. Вероятность того, что каждый телефон потребует ремонта, равна 0,2.

Найти вероятность того, что отклонение доли телефонов, требующих ремонта, от вероятности 0,2 меньше $\varepsilon = 0,02$.

Пусть вероятность того, что отклонение доли телефонов, требующих ремонта, от вероятности 0,2 не превосходит некоторого числа $\varepsilon > 0$, равна 0,9552. Найти ε и границы числа телефонов, которые потребуют ремонта.

3.15. Вероятность изготовления годной детали предприятием равна 0,9. Сколько деталей нужно проверить, чтобы с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения доли годных деталей от вероятности не превысит 0,04?

3.16. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку — 0,3. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

3.17. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит:

а) цифры пять;

б) двух пятерок.

Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные.

3.18. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 — шатеном, с вероятностью 0,1 — рыжим. Выбирается наугад группа из 6 человек. Найти вероятность следующих событий: A — в составе группы не менее 4-х блондинов; B — в составе группы хотя бы один рыжий; C — в составе группы равное число блондинов и шатенов.

3.19. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9544 при 6400 испытаниях.

3.20. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,7 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления «шестерки» от вероятности $\frac{1}{6}$ окажется по абсолютной величине не более 0,02?

4. ДИСКРЕТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1. РЯД, МНОГУГОЛЬНИК И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\{\Omega, P\}$ — дискретное (конечное или счетное) вероятностное пространство, порожденное некоторым экспериментом.

Определение 4.1. Всякая вещественная функция $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, заданная на пространстве элементарных событий Ω , называется *случайной величиной*.

Предполагая, что значения случайной величины $\xi(\omega)$ от некоторых элементарных событий $\omega \in \Omega$ совпадают, рассмотрим только множество всех ее возможных различных значений. Это множество, как и пространство Ω , дискретно и может быть записано в форме

$$\xi(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}.$$

Обозначим через

$$(\xi = x_k) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_k\}$$

множество тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, на которых случайная величина ξ принимает значение, равное x_k . $(\xi = x_k)$ как подмножество из Ω — некоторое событие. Вероятность этого события обозначим через $p_k = P(\xi = x_k)$. С помощью значений x_k случайной величины ξ и соответствующих им вероятностей p_k составим таблицу

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

(4.1)

Эта таблица называется *рядом распределения* случайной величины ξ .

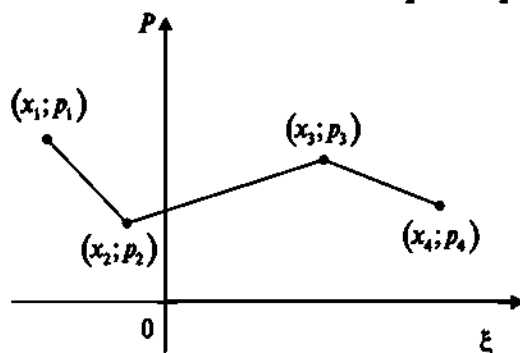


Рис. 4.1

Далее, введем декартову систему координат $O\xi P$ и изобразим на ней пары (x_k, p_k) из табл. (4.1) как точки. Соединяя построенные точки отрезками прямой, получим ломаную, которая носит название *многоугольника распределения* случайной величины ξ . На рис. 4.1 изображен многоугольник распределения конечной дискретной величины.

А теперь зафиксируем вещественное число x и введем множество

$$(\xi < x) = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\}$$

как множество элементарных событий, на которых значения случайной величины ξ строго меньше этого фиксированного числа x . Множество $(\xi < x)$, будучи некоторым событием в пространстве $\{\Omega, P\}$, имеет вероятность. Обозначим ее через

$$F(x) = P(\xi < x). \quad (4.2)$$

Определение 4.2. Вещественная функция $F(x)$, $x \in R$, определенная формулой (4.2), называется функцией распределения случайной величины ξ .

Функция распределения обладает следующими свойствами.

- 1) $F(x)$ — неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
- 2) $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$; (4.3)

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$$

$$5) F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i; \quad (4.4)$$

6) $F(x)$ непрерывна в $\forall x \in R$, за исключением точек $x = x_i$, которые являются точками разрыва 1-го рода этой функции. В этих точках $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_i - 0} F(x) = F(x_i)$.

|| 1) Если $x_1 < x_2$, то и $(\xi < x_1) \subset (\xi < x_2)$. Так как вероятность — возрастающая функция, то и $P(\xi < x_1) \leq P(\xi < x_2)$, т.е. $F(x_1) \leq F(x_2)$.

2) Так как $(\xi < x_2) = (\xi < x_1) + (x_1 \leq \xi < x_2)$ и события справа несовместны, то $P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2)$, откуда следует доказываемое равенство

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

3) Последовательность событий $\{(\xi < -n)\}_{n=1}^{\infty}$ образует монотонно убывающую последовательность с пустым пересечением. Тогда согласно аксиоме A_5 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi < -n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(-n) = P(\emptyset) = 0.$$

Из-за монотонности функции распределения и $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

4) Доказательство аналогичное, только в этом случае нужно рассмотреть возрастающую последовательность $\{(\xi < n)\}_{n=1}^{\infty}$, объединение которых дает пространство элементарных событий Ω , и затем воспользоваться теоремой 1.10.

5) Пусть $x_i < x$, и построим интервал (a_i, a_{i+1}) , содержащий только это значение случайной величины ξ . Тогда множество $(\xi < x)$ можно представить следующим образом:

$$(\xi < x) = \sum_{i: x_i < x} (a_i \leq \xi < a_{i+1}) = \sum_{i: x_i < x} (\xi = x_i).$$

Так как события в последней сумме несовместны, то

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{i: x_i < x} P(\xi = x_i) = \sum_{i: x_i < x} p_i.$$

6) Непрерывность функции $F(x)$ в точках $x \neq x_i$ очевидна (она в этих точках постоянна). Пусть теперь $x = x_i$. Так как

$$(\xi < x_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\xi < x_i - \frac{1}{n} \right)$$

и события в объединении образуют возрастающую последовательность, то согласно теореме 1.10

$$F(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x_i - \frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} F(x). \quad \parallel$$

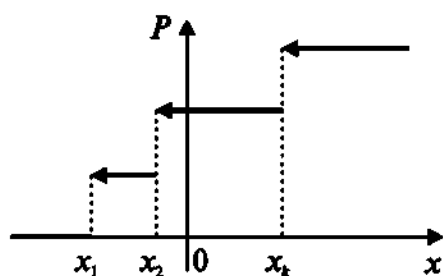


Рис. 4.2

Из формулы (4.4) следует, что график функции распределения $F(x)$ представляет ступенчатую фигуру с точками разрыва 1-го рода в точках $\xi = x_k$. В этих точках скачок равен величине вероятности p_k (рис. 4.2).

Пример 4.1. Производится три независимых выстрела по цели, вероятность попадания при одном выстреле 0,3. ξ —

случайное число попаданий. Составить ряд распределения ξ , найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

|| Пространство элементарных событий, соответствующее трем независимым выстрелам, состоит из $2^3 = 8$ элементарных событий: $\Omega\{(111), (110), (101), (100), (011), (010), (001), (000)\}$, где, как обычно, событие «1» обозначает «успех — попадание», а «0» — «неуспех — промах». Построим события, соответствующие числу попаданий при трех выстрелах:

- $B_0 = \{(000)\}$ — все три промаха;
- $B_1 = \{(100), (010), (001)\}$ — одно попадание;
- $B_2 = \{(110), (101), (011)\}$ — два попадания;
- $B_3 = \{(111)\}$ — все три попадания.

На Ω определим случайную величину ξ следующим образом: $\xi(\omega) = k$, если $\omega \in B_k$, $k = 0, 3$. Нетрудно проверить, что $P(\xi = k) = P_3(k)$, т.е. введенная случайная величина подчиняется биномиальной схеме Бернулли. Поэтому

$$P(\xi = 0) = P_3(0) = C_3^0 (0,3)^0 \cdot (0,7)^3 = 0,343;$$

$$P(\xi = 1) = P_3(1) = C_3^1 (0,3)^1 \cdot (0,7)^2 = 0,441;$$

$$P(\xi = 2) = P_3(2) = C_3^2 (0,3)^2 \cdot (0,7)^1 = 0,189;$$

$$P(\xi = 3) = P_3(3) = C_3^3 (0,3)^3 \cdot (0,7)^0 = 0,027.$$

Напишем искомый ряд распределения ξ :

ξ	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

(4.5)

Контроль: $0,343 + 0,441 + 0,189 + 0,027 = 1$.

Далее, используя полученный ряд распределения, найдем функцию $F(x)$:

если $x \leq 0$, то $F(x) = P(\xi < x) = 0$;

если $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(\xi = 0) = 0,343$;

если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,343 + 0,441 = 0,784$;

если $2 < x \leq 3$, то $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) =$
 $= 0,784 + 0,189 = 0,973$;

если же $x > 3$, то $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$
 $= 0,973 + 0,027 = 1$.

Аналитически функция распределения $F(x)$ запишется

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,343, & 0 < x \leq 1; \\ 0,784, & 1 < x \leq 2; \\ 0,973, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 4.3.

При решении практических задач, связанных со случайными величинами, обычно имеют дело с их распределениями, по возможности не касаясь вопросов отыскания вероятностных пространств, ибо в результате эксперимента обычно регистрируются значения случайных величин (но не сами элементарные события). В следующих примерах ряд распределений изучаемых случайных величин будет установлен без построения соответствующих вероятностных пространств.

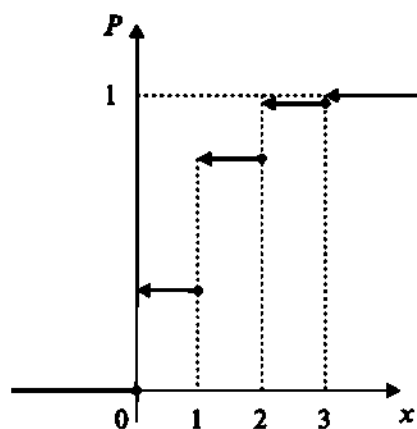


Рис. 4.3

$x_2 = 1$, $x_3 = 2$ — и подчиняется гипергеометрическому закону. Поэтому соответствующие вероятности $P(\xi = m)$ могут быть найдены по формуле (2.2), установленной при решении задачи 2.10:

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

(здесь N — число деталей в партии; M — число стандартных деталей в партии; n — число отобранных деталей; m — число стандартных деталей среди отобранных):

$$P(\xi = 0) = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0,1; \quad P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0,6;$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Составим искомый ряд распределений:

ξ	0	1	2
P	0,1	0,6	0,3

(4.6)

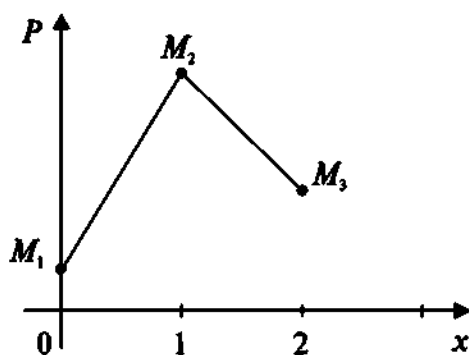


Рис. 4.4

Пример 4.2. В партии из 5 деталей имеется 2 стандартных. Наудачу отбираются 3 детали, ξ — число стандартных деталей среди отобранных. 1) Составить ряд распределения. 2) Построить многоугольник распределения. 3) Найти функцию распределения $F(x)$.

|| 1) Случайная величина ξ — число стандартных деталей среди трех отобранных деталей — имеет следующие значения: $x_1 = 0$,

$x_2 = 1$, $x_3 = 2$ — и подчиняется гипергеометрическому закону. Поэтому соответствующие вероятности $P(\xi = m)$ могут быть найдены по формуле (2.2), установленной при решении задачи 2.10:

Контроль: $0,1 + 0,6 + 0,3 = 1$.

2) Чтобы построить многоугольник распределения, введем прямоугольную систему координат. По оси абсцисс отложим возможные значения ξ , а по оси ординат — соответствующие им вероятности. Соединив точки $M_1(0; 0,1)$, $M_2(1; 0,6)$, $M_3(2; 0,3)$ отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения (рис. 4.4).

3) Используя построенный ряд распределения (4.6), имеем:
 если $x \leq 0$, то $F(x) = P(\xi < x) = 0$;
 если $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) = 0,1$;
 если $1 < x \leq 2$, то $P(\xi < x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,1 + 0,6 = 0,7$;
 если $x > 2$, то $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0,7$.
 Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,1, & 0 < x \leq 1; \\ 0,7, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Графически искомая функция распределения будет представлять собой, как и в предыдущем примере, ступенчатую фигуру со скачками в точках 0, 1, 2 (рис. 4.5).

Пример 4.3. Производятся последовательные независимые испытания 4 приборов на надежность. Испытания заканчиваются после первого же прибора, не выдержавшего испытания. Построить ряд распределения ξ — числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

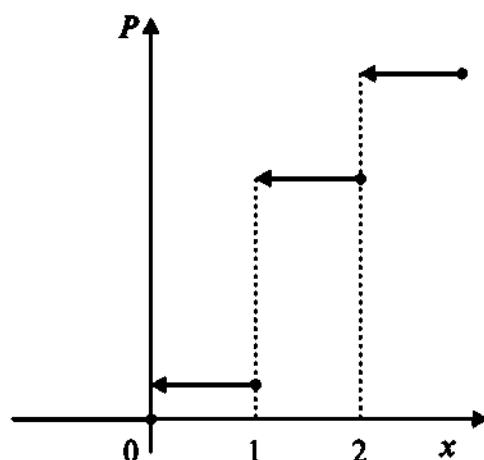


Рис. 4.5

|| Дискретная случайная величина ξ — число испытанных приборов — имеет следующие возможные значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Случайная величина ξ примет возможное значение $x_1 = 1$ (придется испытывать только один прибор), если первый прибор окажется ненадежным (вероятность этого события равна 0,1). Тогда $P(\xi = 2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$. Аналогично найдем $P(\xi = 3) = 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081$. Случайная величина ξ примет возможное значение $x_4 = 4$ (придется испытывать 4 прибора), если первые три прибора окажутся надежными (вероятность этого события равна $0,9^3$), а четвертый может оказаться либо ненадежным, либо надежным (вероятность этого события равна $0,1 + 0,9 = 1$). Тогда $P(\xi = 4) = 0,9^3 \cdot (0,1 + 0,9) = 0,9^3$ и искомый закон распределения запишется как

ξ	1	2	3	4
P	0,1	0,09	0,081	0,729

(4.7)

Контроль: $0,1 + 0,09 + 0,081 + 0,729 = 1$. ||

Наконец, рассмотрим пример распределения случайной величины, имеющей счетное число значений.

Пример 4.4. Стрельба по цели ведется до первого попадания. Найти закон распределения случайной величины ξ — числа произведенных выстрелов до первого попадания, если все производимые выстрелы независимые и имеют одну и ту же вероятность попадания p .

В связи с тем что первое попадание может произойти при любом выстреле: при первом, втором и т.д. (т.е. случайная величина ξ может принять любое значение $n \in N$), то множество возможных значений случайной величины ξ совпадает с множеством натуральных чисел, т.е. его значение счетно. Далее, обозначим через «1» и «0» события, выражающие соответственно «попадание» и «промах» при одном выстреле, и пусть p и q — их вероятности. Тогда события (1), (01), (001), ... будут обозначать первое попадание после первого, второго, третьего и т.д. выстрелов. Так как производимые выстрелы независимые, то для нахождения их вероятностей используем теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(\xi = 1) = P(1) = p;$$

$$P(\xi = 2) = P(01) = P(0) \cdot P(1) = q \cdot p;$$

$$P(\xi = 3) = P(001) = P(0) \cdot P(0) \cdot P(1) = q^2 \cdot p; \dots$$

Нетрудно видеть, что найденные вероятности $p, pq, pq^2, \dots$ образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q . Поэтому говорят, что рассматриваемая случайная величина имеет геометрический закон распределения:

ξ	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

(4.8)

Контроль: $p + pq + pq^2 + \dots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1. \quad \square$

4.2. ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Пусть для случайной величины ξ известен закон ее распределения

ξ	x_1	x_2	x_3	...
P	p_1	p_2	p_3	...

(4.9)

и пусть, кроме того, задана некоторая вещественная функция $f(x)$, $x \in R$. Тогда $\zeta = f(\xi)$ является тоже некоторой случайной величиной, принимающей свои возможные значения $f(x_i)$ с той же вероятностью p_i , $i = 1, 2, \dots$, что и заданная случайная величина ξ . В частности, при $f(\xi) = k \cdot \xi$ и $f(\xi) = \xi^2$ будем иметь следующие распределения этих случайных величин:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} k\xi & kx_1 & kx_2 & kx_3 & \dots \\ \hline P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}; \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots \\ \hline P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}.$$

Пример 4.5. Известен закон распределения случайной величины ξ :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & -3 & -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \hline P & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,25 & 0,05 \end{array}.$$

Найти распределение случайной величины ξ^2 .

|| Возможные значения случайной величины ξ^2 образуют множество: $\xi^2(\omega) = (0, 1, 9, 25)$. Если она свои значения 0 и 25 принимает с теми же вероятностями, что и случайная величина ξ , то вероятности принятия значений 1 и 9 уже будут другими:

$$P(\xi^2 = 1) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = 0,2 + 0,1 = 0,3;$$

$$P(\xi^2 = 9) = P(\xi = -3) + P(\xi = 3) = 0,1 + 0,25 = 0,35.$$

Следовательно, случайная величина ξ^2 имеет следующее распределение:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi^2 & 0 & 1 & 9 & 25 \\ \hline P & 0,3 & 0,3 & 0,35 & 0,05 \end{array} \quad ||$$

А теперь, предполагая, что еще задан закон распределения случайной величины η

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \eta & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ \hline P & p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 & \dots \end{array},$$

рассмотрим совместное распределение случайных величин ξ и η . С этой целью введем события $(\xi = x_i; \eta = y_j)$, заключающиеся в том, что случайные величины ξ и η принимают значения x_i и y_j соответственно. Вероятность этих событий обозначим через p_{ij} . Так как $(\xi = x_i; \eta = y_j) = (\xi = x_i) \cdot (\eta = y_j)$, то

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P((\xi = x_i) \cdot (\eta = y_j)). \quad (4.10)$$

Вследствие того, что

$$\sum_i (\xi = x_i; \eta = y_j) = (\eta = y_j) \cdot \sum_i (\xi = x_i) = (\eta = y_j) \cdot \Omega = (\eta = y_j), \text{ то}$$

$$P\left(\sum_i (\xi = x_i; \eta = y_j)\right) = \sum_i P(\xi = x_i; \eta = y_j) = \sum_i p_{ij} = P(\eta = y_j) = p_j^1$$

или $\sum_i p_{ij} = p_j^1.$ (4.11)

Аналогично показывается, что

$$\sum_j p_{ij} = p_i. \quad (4.12)$$

Совместное распределение двух дискретных случайных величин с конечным значением удобней записывать в виде таблицы с двумя входами. В таблице (4.13) возможные значения ξ и η расположены соответственно в 1-й строке и 1-м столбце. Вероятность $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$, $i = 1, n$, $j = 1, m$ расположена на пересечении i -го столбца и j -й строки таблицы. Последние строка и столбец таблицы являются распределениями вероятности уже случайных величин ξ и η соответственно, что непосредственно следует из формул (4.11) и (4.12). Таким образом, мы можем утверждать, что совместное распределение случайных величин ξ и η одновременно определяет распределение самих этих величин.

$\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \end{smallmatrix}$ ξ η	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	Распределение η
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{i1}	$\dots$	p_{n1}	$p_1^j = \sum_{k=1}^n p_{k1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{i2}	$\dots$	p_{n2}	$p_2^j = \sum_{k=1}^n p_{k2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{nj}	$p_j^j = \sum_{k=1}^n p_{kj}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{im}	$\dots$	p_{nm}	$p_m^j = \sum_{k=1}^n p_{km}$
Распределение ξ	$p_1 = \sum_{l=1}^m p_{1l}$	$p_2 = \sum_{l=1}^m p_{2l}$	$\dots$	$p_i = \sum_{l=1}^m p_{il}$	$\dots$	$p_n = \sum_{l=1}^m p_{nl}$	Контроль $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Пример 4.6. Совместное распределение величин ξ и η дано таблицей (4.14). Найти закон распределения каждой величины ξ и η .

$\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \end{smallmatrix}$ ξ η	1	3
0	0,2	0,1
2	0,15	0,25
5	0,25	0,05

|| Величина ξ принимает возможные значения 1 и 3 с вероятностями: $p_1 = P(\xi = 1) = 0,2 + 0,15 + 0,25 = 0,6$ и $p_2 = P(\xi = 3) = 0,1 + 0,25 + 0,05 = 0,4$.

Аналогично вычисляются вероятности принятия своих значений и величиной η : $p_1^1 = P(\eta = 0) = 0,2 + 0,1 = 0,3$; $p_2^1 = P(\eta = 2) = 0,15 + 0,25 = 0,4$; $p_3^1 = P(\eta = 5) = 0,25 + 0,05 = 0,3$.

Используя полученные результаты, составим ряд распределения величин ξ и η :

$$\begin{array}{c|c|c} \xi & 1 & 3 \\ \hline P & 0,6 & 0,4 \end{array}; \quad \begin{array}{c|c|c} \eta & 0 & 2 & 5 \\ \hline P & 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{array} \quad \parallel$$

Определение 4.3. Дискретные случайные величины ξ и η называются независимыми, если независимы события $(\xi = x_i)$ и $(\eta = y_j)$ для $\forall i, j$. В противном случае случайные величины ξ и η называются зависимыми.

Для независимых случайных величин ξ и η вероятности p_{ij} имеют следующие представления:

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j) = p_i p_j, \quad \forall i, j. \quad (4.15)$$

Если же случайные величины ξ и η зависимы, то их вероятности p_{ij} выражаются уже через условные вероятности:

$$p_{ij} = p_i \cdot P_{(\xi=x_i)}(\eta = y_j), \quad (4.16)$$

где условная вероятность $P_{(\xi=x_i)}(\eta = y_j)$ вычисляется с учетом того, что случайная величина ξ уже приняла значение x_i .

Определение 4.4. Под суммой $\xi + \eta$ случайных величин ξ и η понимают новую случайную величину, которая принимает свои значения $x_i + y_j$ с вероятностью $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$

Аналогично определяются разности и произведения двух случайных величин. А сумму (произведение) трех и более случайных величин можно ввести по индукции, при этом сначала находят сумму (произведения) первых двух случайных величин и затем, рассматривая ее как одну первую случайную величину, складывают (умножают) ее с третьей и т. д.

Пример 4.7. Подбрасываются одновременно две одинаковые игральные кости, на гранях которых нанесены цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составить ряд распределения случайной величины ζ — сумм очков, выпавших на верхних гранях обеих костей в результате их одновременного подбрасывания.

|| Очевидно, случайную величину ζ можно рассматривать как сумму случайных величин ξ и η , предполагая, что значения этих случайных величин выражают число очков, выпавших соответственно на первой и второй игральной кости. Следовательно, случайная величина $\zeta = \xi + \eta$ может принять следующие 12 значений: $\zeta(\omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Так как случайные величины ξ и η

независимы, то вероятности $P(\zeta = z)$, $z = \overline{2, 12}$ можно найти по формуле (4.15). Например,

$$\begin{aligned} P(\zeta = 2) &= P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}; \\ P(\zeta = 4) &= P(\xi = 1; \eta = 3) + P(\xi = 2; \eta = 2) + P(\xi = 3; \eta = 1) = \\ &= P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 3) + P(\xi = 2) \cdot P(\eta = 2) + P(\xi = 3) \cdot P(\eta = 1) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}; \quad P(\zeta = 11) = P(\xi = 5; \eta = 6) + \\ &+ P(\xi = 6; \eta = 5) = P(\xi = 5) \cdot P(\eta = 6) + P(\xi = 6) \cdot P(\eta = 5) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Вычислив аналогичным образом остальные вероятности, составим ряд распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$:

$\zeta = \xi + \eta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

(4.17)

Контроль: $\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} \right) \cdot 2 + \frac{1}{6} = 1$.

А теперь рассмотрим пример, где уже складываются зависимые случайные величины.

Пример 4.8. В группе спортсменов организована лотерея, где разыгрываются три вещи стоимостью по 10 руб. и две — по 20 руб. Составить закон распределения суммы выигрыша спортсмена, купившего два билета, если известно, что продано всего 20 билетов.

Прежде всего введем случайные величины ξ и η , выражающие суммы выигрышей, выпавших соответственно на первый и второй купленные билеты, составим закон распределения одной из них, например случайной величины ξ . Случайная величина ξ может иметь всего три значения: 0, 10, 20. Им соответствуют следующие вероятности: $P(\xi = 0) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ (всего билетов 20, из них 15 невыигранных); $P(\xi = 10) = \frac{3}{20}$ (среди 20 билетов 3 билета стоимостью 10 руб.); $P(\xi = 20) = \frac{2}{20} = 0,1$ (среди 20 билетов содержится 2 билета стоимостью 20 руб.).

Следовательно, закон распределения случайных величин ξ и η имеет вид

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi, \eta & 0 & 10 & 20 \\ \hline P & 0,75 & 0,15 & 0,1 \end{array} \quad (4.18)$$

Контроль: $0,75 + 0,15 + 0,1 = 1$.

Ясно, что сумма выигрышей, выпавших на оба купленных билета (случайная величина ζ), складывается из сумм выигрышей, выпавших на каждый из этих билетов. Следовательно, $\zeta = \xi + \eta$, и нетрудно усмотреть, что случайная величина ζ может принять значения: 0, 10, 20, 30, 40. Так как случайные величины ξ и η зависимы (величина выигрыша, выпавшего на второй билет, зависит от величины выигрыша, выпавшего на первый билет), то в этот раз вероятности $P(\zeta = m)$, $m = 0; 10; 20; 30; 40$ вычисляем по формуле (4,16):

$$P(\zeta = 0) = P(\xi = 0; \eta = 0) = P(\xi = 0) \cdot P_{\xi=0}(\eta = 0) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38};$$

$$P(\zeta = 10) = P(\xi = 10; \eta = 0) + P(\xi = 0; \eta = 10) = \frac{3}{20} \cdot \frac{15}{19} + \frac{15}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{9}{38};$$

$$\begin{aligned} P(\zeta = 20) &= P(\xi = 20; \eta = 0) + P(\xi = 10; \eta = 10) + P(\xi = 0; \eta = 20) = \\ &= \frac{15}{20} \cdot \frac{2}{19} + \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{15}{19} = \frac{33}{190}; \end{aligned}$$

$$P(\zeta = 30) = P(\xi = 10; \eta = 20) + P(\xi = 20; \eta = 10) = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{3}{95};$$

$$P(\zeta = 40) = P(\xi = 20; \eta = 20) = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{190}.$$

Следовательно, случайная величина $\zeta = \xi + \eta$ имеет следующий ряд распределений:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \zeta = \xi + \eta & 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ \hline P & \frac{21}{38} & \frac{9}{38} & \frac{33}{190} & \frac{3}{95} & \frac{1}{190} \end{array} \quad (4.19)$$

Контроль: $\frac{21}{38} + \frac{9}{38} + \frac{33}{190} + \frac{3}{95} + \frac{1}{190} = 1$.

4.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Хотя закон распределения случайной величины является одной из важных характеристик случайной величины, но составить о ней до-

статочное полное представление только по ряду распределения бывает весьма трудно. Эти трудности начинают усиливаться, когда случайная величина содержит достаточно большое число значений или счетно. Поэтому возникает вполне оправданное желание введения новых параметров, которые, используя известное распределение, строились бы достаточно просто, обладали хорошими свойствами и достаточно полно характеризовали изучаемую случайную величину. Такие параметры построены, и одной из важных характеристик случайной величины являются моменты различных порядков, в частности математическое ожидание случайной величины — момент первого порядка. Предварительно рассмотрим пример, который подведет нас к понятию математического ожидания случайной величины.

Пример 4.9. На курсовом вечере организована беспроигрышная лотерея. Разыгрывается 50 выигрышей, из них 30 — по 10 руб., 15 — по 20 руб. и 5 — по 30 руб. Студент купил 1 билет. Каков его средний размер выигрыша?

▮ Чтобы найти средний размер выигрыша x_c студента, поступим следующим образом: сначала найдем общую сумму выигрышей, а затем полученную сумму разделим на 50 — число лотерейных билетов, т.е.

$$x_c = \frac{30 \cdot 10 + 15 \cdot 20 + 5 \cdot 30}{50} = 15 \text{ руб.} \quad (4.20)$$

А теперь сумму, фигурирующую в формуле (4.20), деля ее почленно на 50, преобразуем к следующему виду:

$$x_c = 10 \cdot 0,6 + 20 \cdot 0,3 + 30 \cdot 0,1. \quad (4.21)$$

Далее, введем случайную величину ξ со значениями, равными размерам выигрышей, указанных в лотерейных билетах: 10, 20, 30. Нетрудно проверить, что числа 0,6; 0,3; 0,1 являются их вероятностями.

Сумма, фигурирующая в формуле (4.21), называется математическим ожиданием случайной величины ξ , и она, как мы уже видели, выражает среднее значение введенной случайной величины ξ . Из формулы (4.21) следует, что математическое ожидание строится как сумма произведений значений случайной величины на их вероятности. ▮

Пусть задана случайная величина $\xi(\omega)$ на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, P\}$.

Определение 4.5. Если ряд $\sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$ сходится абсолютно, то его сумма называется *математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается $M\xi$.

Итак, по определению

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega). \quad (4.22)$$

Требование абсолютной сходимости ряда (4.22) является необходимым условием существования математического ожидания, ибо только абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством. А порядок расположения членов в ряде (4.22), вообще говоря, не определен, потому что случайная величина ξ свои значения $\xi(\omega)$ принимает случайно, и поэтому-то бывает затруднительно указать, какие и в каком порядке она принимает значения. Если вероятностное пространство $\{\Omega, P\}$ конечно, то сумма (4.22) содержит конечное число слагаемых и вопрос об абсолютной сходимости автоматически отпадает.

Если для случайной величины ξ известен ее закон распределения

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & \cdots \\ \hline P & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_k & \cdots \end{array}, \quad (4.23)$$

то ряд (4.22) приобретает вполне «прозрачную» форму, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Если известен ряд распределения (4.23) случайной величины ξ , то ее математическое ожидание равно сумме произведений ее значений на соответствующие им вероятности, т.е.

$$M\xi = \sum_k x_k p_k. \quad (4.24)$$

|| По определению $M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = \sum_k x_k \sum_{\omega: \xi(\omega)=x_k} P(\omega) = \sum_k x_k p_k$, и теорема доказана. При ее доказательстве существенным образом использовалась абсолютная сходимость ряда (4.22). ||

Теорема 4.2. Если вещественная функция f определена и на значениях случайной величины ξ , то

$$Mf(\xi) = \sum_k f(x_k) p_k. \quad (4.25)$$

|| Так как вероятность соответствующих значений случайных величин ξ и $f(\xi)$ совпадают, т.е.

$$P(\xi = x_k) = P(f(\xi) = f(x_k)), \text{ то}$$

$$Mf(\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\xi(\omega)) \cdot P(\omega) = \sum_k f(x_k) \sum_{\omega: \xi(\omega)=x_k} P(\omega) = \sum_k f(x_k) p_k. \quad ||$$

Полагая в формуле (4.25) $f(\xi) = \alpha \cdot \xi$, где α — некоторая постоянная величина, получим $M(\alpha\xi) = \sum_k \alpha x_k p_k = \alpha \sum_k x_k p_k = \alpha M\xi$, или

$$M(\alpha\xi) = \alpha M\xi. \quad (4.26)$$

Интерпретируя математическое ожидание как функционал, заданный на случайных функциях (величинах), только что полученный результат мы сможем сформулировать следующим образом.

Следствие 4.1. Математическое ожидание есть однородный функционал, т.е. постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания.

Определение 4.6. Математическое ожидание случайной величины ξ^k , т.е. выражение $v_k = M\xi^k$, называется *моментом* (начальным моментом) *k-го порядка* случайной величины ξ .

Из формулы (4.25) (полагая в ней $f(\xi) = \xi^k$) непосредственно получаем и формулы для вычисления моментов:

$$M\xi^k = \sum_i x_i^k p_i. \quad (4.27)$$

В качестве задач на вычисление математического ожидания случайных величин используем предыдущие примеры 4.1—4.4.

|| а) В примере 4.1 случайная величина ξ выражает число попаданий в трех независимых выстрелах и имеет биномиальное распределение (4.5). Для вычисления ее математического ожидания используем формулу (4.24):

$$M\xi = 0 \cdot 0,343 + 1 \cdot 0,441 + 2 \cdot 0,189 + 3 \cdot 0,027 = 0,9.$$

б) В примере 4.2 случайная величина ξ означает число стандартных деталей среди трех отобранных и имеет гипергеометрическое распределение, приведенное в табл. (4.6). По формуле (4.24) находим ее математическое ожидание:

$$M\xi = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 1,2.$$

в) В примере 4.3 случайная величина ξ — число испытанных приборов на надежность — имеет геометрическое распределение (4.7). Ее математическое ожидание

$$M\xi = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,081 + 4 \cdot 0,729 = 3,439.$$

г) В этом примере (4.4) число значений случайной величины ξ — число выстрелов, производимых до первого попадания, счетно. Поэтому ее математическое ожидание представляется сходящимся рядом:

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n p q^{n-1} = p \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)' = p \cdot \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \quad \text{||}$$

А в предыдущем пункте определены сумма, разность и произведение случайных величин и для них построены соответствующие

ряды распределений, по которым согласно формуле (4.24) можно найти их математические ожидания.

Теорема 4.3. Математическое ожидание есть аддитивный функционал, т.е.

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \quad (4.28)$$

|| Используя распределения (4.9) и (4.10) случайных величин ξ и η и формулы (4.11) и (4.12), выражающие вероятности совместных распределений, имеем

$$\begin{aligned} M(\xi + \eta) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} = \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j p_j = M\xi + M\eta. \quad _|| \end{aligned}$$

Пример 4.11. Используя результат примеров 4.7 и 4.8, убедимся в справедливости теоремы 4.3.

|| а) В примере 4.7 случайные величины ξ и η , выражающие число очков, выпавших соответственно на первой и второй игральной кости, независимы и одинаково распределены. Поэтому $M\xi = M\eta = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$. Следовательно, $M\xi + M\eta = 7$. Распределение суммы $\zeta = \xi + \eta$ этих случайных величин представлено в табл. (4.17). Математическое ожидание суммы ζ находим по формуле (4.24):

$$\begin{aligned} M(\xi + \eta) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{36} + \\ &+ 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7. \end{aligned}$$

б) В примере 4.8 рассматриваемые случайные величины ξ и η являются зависимыми. Так как они распределены одинаково (см. табл. (4.18)), то имеют и равные математические ожидания. А именно: $M\xi = M\eta = 0 \cdot 0,75 + 10 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,1 = 3,5$. Следовательно, $M\xi + M\eta = 7$. А теперь, используя закон распределения их суммы ζ (см. табл. (4.19)), вычислим математическое ожидание $M\zeta$. Имеем $M\zeta = 0 \cdot \frac{21}{38} + 10 \cdot \frac{9}{38} + 20 \cdot \frac{33}{190} + 30 \cdot \frac{3}{95} + 40 \cdot \frac{1}{190} = 7$.

Таким образом, и в этом случае $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, т.е. теорема 4.3 справедлива и для зависимых случайных величин. ||

Если в формуле (4.28) вместо η положить $(-\eta)$, то получим формулу для вычисления математического ожидания разности случайных величин:

$$M(\xi - \eta) = M(\xi + (-\eta)) = M\xi + M(-\eta) = M\xi - M\eta.$$

Получили доказательство следующего утверждения.

Следствие 4.2. Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности их математических ожиданий.

На вероятностном пространстве $\{\Omega, P\}$ определим так называемую постоянную случайную величину: $\xi(\omega) = C, \forall \omega \in \Omega$. Тогда согласно формуле (4.24)

$$MC = \sum_{\omega \in \Omega} C \cdot P(\omega) = C \cdot 1 = C.$$

Получили доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.4. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной.

Просто находится и математическое ожидание произведения независимых случайных величин.

Теорема 4.5. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta. \quad (4.29)$$

Для независимых случайных величин ξ и η справедлива формула (4.15). Поэтому $M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i,j} x_i y_j p_i p_j = \sum_{i,j} x_i p_i \cdot \sum_{i,j} y_j p_j = M\xi \cdot M\eta$. $\square$

Пример 4.12. Независимые случайные величины ξ и η заданы законами распределения:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} \eta & 0 & 1 \\ \hline P & 0,6 & 0,4 \end{array}.$$

Проверить, что для них справедливо утверждение теоремы 4.5.

Сначала найдем математические ожидания случайных величин ξ и η :

$$M\xi = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = 1,7; \quad M\eta = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4.$$

Следовательно, $M\xi \cdot M\eta = 1,7 \cdot 0,4 = 0,68$. Затем найдем закон распределения случайной величины $\zeta = \xi \cdot \eta$. Она принимает следующие возможные значения: 0, 1, 2, 3. Этим значениям соответствуют вероятности:

$$P(\zeta = 0) = (P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) \cdot P(\eta = 0) = 1 \cdot 0,6 = 0,6;$$

$$P(\zeta = 1) = P(\xi = 1; \eta = 1) = P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 1) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2;$$

$$P(\zeta=2)=P(\xi=2; \eta=1)=P(\xi=2) \cdot P(\eta=1)=0,3 \cdot 0,4=0,12;$$

$$P(\zeta=3)=P(\xi=3; \eta=1)=P(\xi=3) \cdot P(\eta=1)=0,2 \cdot 0,4=0,08.$$

Следовательно, $M\zeta = M(\xi \cdot \eta) = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,08 = 0,68$ и утверждение теоремы 4.5 справедливо для рассматриваемых случайных величин. $\square$

4.4. ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ЕЕ СВОЙСТВА. КОВАРИАЦИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Другой важной характеристикой случайной величины является дисперсия, выражающая меру рассеяния значений случайной величины около ее среднего значения — математического ожидания. Предварительно рассмотрим пример, который хотя бы частично прояснит сущность изучаемого вопроса.

$\square$ **Пример 4.13.** Пусть случайные величины ξ и η заданы следующими законами распределения:

ξ	-0,2	-0,05	0	0,05	0,2	η	-20	-15	0	15	20
P	0,15	0,1	0,5	0,1	0,15	P	0,2	0,25	0,1	0,25	0,2

Хотя случайные величины ξ и η имеют одинаковые математические ожидания, равные нулю:

$$M\xi = -0,2 \cdot 0,15 - 0,05 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,15 = 0;$$

$$M\eta = -20 \cdot 0,2 - 15 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,25 + 20 \cdot 0,2 = 0,$$

однако нетрудно видеть, что характер распределения их весьма различный: если значения первой мало разнятся от ее среднего значения, то разброс значений второй от ее математического ожидания значительный. $\square$

Отклонение случайной величины ξ от ее среднего значения характеризуется разностью $\xi - M\xi$. Так как среднее значение этих отклонений

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0 \quad (4.30)$$

для любых случайных величин ξ (имеющих как большой, так и малый разброс значений около математического ожидания), то величина $M(\xi - M\xi)$ не может служить мерой рассеяния значений случайной величины около ее среднего значения. Поэтому в качестве этой меры берут математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения.

Определение 4.7. *Дисперсией* случайной величины (обозначение $D\xi$) называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания, т.е.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (4.31)$$

Пусть случайная величина ξ задана законом распределения (4.23). Тогда, полагая в формуле (4.25) $f(\xi) = (\xi - M\xi)^2$, непосредственно получим формулу для вычисления ее дисперсии:

$$D\xi = \sum_k (x_k - M\xi)^2 \cdot p_k. \quad (4.32)$$

Более простую формулу для вычисления дисперсии дает следующая теорема.

Теорема 4.6. Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания ее квадрата и квадрата ее математического ожидания:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (4.33)$$

▮ Используя формулу (4.31) и линейность математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot M\xi - (M\xi)^2) = M\xi^2 - M(2\xi M\xi) + \\ &+ M(M\xi)^2 = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 4.14. Найти дисперсию случайной величины, закон распределения которой приведен в примере 4.5.

▮ Используя закон распределения случайных величин ξ и ξ^2 , найдем сначала их математические ожидания:

$$\begin{aligned} M\xi &= -3 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,05 = \\ &= -0,3 - 0,2 + 0,1 + 0,75 + 0,25 = 0,6; \end{aligned}$$

$$M\xi^2 = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,35 + 25 \cdot 0,05 = 0,3 + 3,15 + 1,25 = 4,7.$$

Дисперсию находим по формуле (4.33):

$$D\xi = 4,7 - (0,6)^2 = 4,34.$$

Тот же результат мы получим, если для вычисления дисперсии используем формулу (4.31):

$$\begin{aligned} D\xi &= (-3 - 0,6)^2 \cdot 0,1 + (-1 - 0,6)^2 \cdot 0,2 + (0 - 0,6)^2 \cdot 0,3 + (1 - 0,6)^2 \cdot 0,1 + \\ &+ (3 - 0,6)^2 \cdot 0,25 + (5 - 0,6)^2 \cdot 0,05 = 1,296 + 0,512 + 0,108 + 0,016 + \\ &+ 1,44 + 0,968 = 4,34. \quad \square \end{aligned}$$

Другой мерой рассеяния случайной величины около ее среднего значения служит среднее квадратическое отклонение.

Определение 4.8. Средним квадратическим отклонением (обозначение $\sigma(\xi)$ или σ) случайной величины ξ называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии, т.е.

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}.$$

Среднее квадратическое отклонение обычно используется в тех случаях, когда возникает необходимость выразить рассеяние в тех же единицах измерения, что и математическое ожидание.

Приведем теоремы, выражающие основные свойства дисперсии.

Теорема 4.7. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

|| Согласно формуле (4.33)

$$D(C) = M(C^2) - (MC)^2 = C^2 - C^2 = 0. \quad _||$$

Теорема 4.8. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат, т.е.

$$D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi.$$

|| Опять применяя формулу (4.33), имеем

$$\begin{aligned} D(\alpha\xi) &= M(\alpha\xi)^2 - (M(\alpha\xi))^2 = M(\alpha^2\xi^2) - (\alpha M\xi)^2 = \\ &= \alpha^2 M\xi^2 - \alpha^2 (M\xi)^2 = \alpha^2 (M\xi^2 - (M\xi)^2) = \alpha^2 D\xi. \quad _|| \end{aligned}$$

Пусть ξ и η — две произвольные случайные величины.

Определение 4.9. Выражение вида

$$M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = \text{cov}(\xi, \eta) \quad (4.34)$$

называется *ковариацией* (или корреляционным моментом) случайных величин ξ и η .

Теорема 4.9. Для независимых случайных величин их ковариация равна нулю, т.е. $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$.

|| Действительно, в этом случае будут независимы и случайные величины $\xi - M\xi$ и $\eta - M\eta$ (см. замечание §12). Тогда математическое ожидание их произведения (т.е. ковариацию величин ξ и η) можно найти по формуле (4.29):

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= M(\xi - M\xi) \cdot M(\eta - M\eta). \text{ Но согласно формуле (4.30)} \\ M(\xi - M\xi) &= M(\eta - M\eta) = 0. \text{ Поэтому и } \text{cov}(\xi, \eta) = 0. \quad _|| \end{aligned}$$

Используя только что введенное понятие ковариации, найдем формулу для вычисления дисперсии суммы случайных величин.

Теорема 4.10. Для любых случайных величин

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta). \quad (4.35)$$

Если же ξ и η независимы, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta. \quad (4.36)$$

|| По определению дисперсии (см. формулу (4.31))

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= M(\xi + \eta - M(\xi + \eta))^2 = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = \\ &= M((\xi - M\xi)^2 + 2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + (\eta - M\eta)^2) = \\ &= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 + 2M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = \\ &= D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Для независимых величин ξ и η , как было показано выше, их ковариация равна нулю. Поэтому $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$. ||

Пример 4.14. Для случайных величин ξ и η , рассмотренных в примере 4.8, вычислить: 1) их ковариацию; 2) дисперсию и среднее квадратическое отклонение их сумм.

|| 1) Как и в примере 4.8, сначала построим ряд распределения произведения $(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$:

$(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$	12,25	-22,75	42,25	-57,75	107,25	272 / 25
P	$\frac{21}{38}$	$\frac{9}{38}$	$\frac{3}{190}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{3}{95}$	$\frac{1}{90}$

Затем по формуле (4.34) вычислим искомую ковариацию величин ξ и η :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= 12,25 \cdot \frac{21}{38} - 22,75 \cdot \frac{9}{38} + 42,25 \cdot \frac{3}{90} - 57,75 \cdot \frac{3}{19} + 107,25 \cdot \frac{3}{95} + \\ &\quad + 272,25 \cdot \frac{1}{90} = -2,25. \end{aligned}$$

2) Так как случайные величины ξ и η распределены одинаково, то одинаково распределены и их квадраты. Поэтому $M\xi^2 = M\eta^2 = 0 \cdot 0,75 + 100 \cdot 0,15 + 400 \cdot 0,1 = 55$. Для вычисления дисперсий величин ξ и η используем формулу (4.33): $D\xi = D\eta = 55 - 12,75 = 42,75$.

Наконец, по формуле (4.35) находим дисперсию суммы случайных величин ξ и η : $D(\xi + \eta) = 42,75 + 42,75 - 2 \cdot 2,25 = 81$.

Следовательно, $\sigma(\xi + \eta) = \sqrt{D(\xi + \eta)} = 9$.

А сейчас укажем и приведем доказательства основных свойств ковариации.

1. Ковариация является симметрическим функционалом, т.е. $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$.

$$2. \operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi.$$

3. Ковариация является однородным функционалом своих аргументов: $\operatorname{cov}(C_1 \xi, C_2 \eta) = C_1 C_2 \operatorname{cov}(\xi, \eta)$, где C_1, C_2 — постоянные.

4. Ковариацию величин ξ и η можно найти через их математические ожидания и математическое ожидание их произведения, т.е. справедлива следующая формула:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta. \quad (4.37)$$

$$5. |\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi \cdot D\eta}.$$

|| 1. Так как $M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M((\eta - M\eta)(\xi - M\xi))$, то по определению ковариации $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$.

$$2. \text{ Полагая в формуле (4.34) } \eta = \xi, \text{ имеем } \operatorname{cov}(\xi, \xi) = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

3. Это утверждение непосредственно следует из формулы (4.34) и однородности математического ожидания:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(C_1 \xi, C_2 \eta) &= M((C_1 \xi - M(C_1 \xi))(C_2 \eta - M(C_2 \eta))) = \\ &= C_1 C_2 M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = C_1 C_2 \operatorname{cov}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

4. Для получения формулы (4.37) преобразуем левую часть равенства (4.34), используя линейность математического ожидания:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\xi, \eta) &= M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi \cdot \eta - (M\xi)\eta - (M\eta)\xi + M\xi \cdot M\eta) = \\ &= M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta - M\eta \cdot M\xi + M\xi \cdot M\eta = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta. \end{aligned}$$

Следует заметить, что в большинстве случаев применение этой формулы для вычисления ковариации приводит к цели гораздо быстрее, чем использование формулы (4.34).

5. Используя теорему 4.10 и однородность ковариации, преобразуем выражение $D(x \cdot \xi + \eta)$, где x — некоторый вещественный параметр:

$$D(x\xi + \eta) = D(x\xi) + D\eta + 2\operatorname{cov}(x\xi, \eta) = x^2 D\xi + 2x \operatorname{cov}(\xi, \eta) + D\eta \geq 0.$$

Поскольку квадратный трехчлен слева положителен для $\forall x \in R$, то его дискриминант не положителен: $\operatorname{cov}^2(\xi, \eta) - D\xi \cdot D\eta \leq 0$, откуда и следует требуемое неравенство: $|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi \cdot D\eta}$.

Используя понятие ковариации, укажем одно из необходимых условий независимости случайных величин. Сначала дадим следующее важное определение.

Определение 4.10. Случайные величины ξ и η называются *коррелированными*, если их ковариация отлична от нуля. Если же $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, то величины ξ и η называются *некоррелированными*.

Из теоремы 4.9 немедленно следует следующее утверждение.

Следствие. Если случайные величины ξ и η независимы, то они и некоррелированы, т.е. их $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Из этого следствия непосредственно вытекает, что если случайные величины коррелированы, т.е. их $\text{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, то они зависимы. Обратное утверждение, вообще-то говоря, неверно: есть зависимые некоррелированные случайные величины (см. пример 12.1).

Для выражения количественной характеристики степени зависимости случайных величин ξ и η вводится коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$, определяемый следующей формулой:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta)}. \quad (4.38)$$

Приведем и докажем основные свойства коэффициента корреляции.

1. $|r(\xi, \eta)| \leq 1$.
2. Если ξ и η независимы, то $r(\xi, \eta) = 0$.
3. Если между ξ и η существует линейная зависимость, т.е. $\eta = \alpha\xi + \beta$, где α и β — некоторые постоянные, то

$$|r(\xi, \eta)| = 1. \quad (4.39)$$

|| 1. Это свойство есть следствие свойства 5 ковариации.

2. Для независимых величин $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. Согласно формуле (4.38) и $r(\xi, \eta) = 0$.

3. Введем обозначения $M\xi = a$; $D\xi = \sigma^2$. Тогда $M\eta = \alpha a + \beta$, $D\eta = \alpha^2 \sigma^2$ и $\text{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\alpha\xi + \beta - M(\alpha\xi + \beta))) = \alpha M(\xi - M\xi)^2 = \alpha D\xi = \alpha \sigma^2$. Полученные выражения ковариации и дисперсий подставляем в формулу (4.38):

$$r(\xi, \eta) = \frac{\alpha \sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \alpha^2 \sigma^2}} = \frac{\alpha}{|\alpha|}. \text{ Следовательно, } |r(\xi, \eta)| = 1. \quad _||$$

4.5. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$ задана дискретная случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ законом распределения

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$

Определение 4.11. Математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания, т.е. выражения вида

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k,$$

называется *центральный момент k -го порядка*.

Из определения, в частности, следует, что дисперсия представляет собой центральный момент 2-го порядка.

Их формулы (4.25), полагая в ней $f(\xi) = (\xi - M\xi)^k$, получим формулы для их вычисления:

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \sum_i (x_i - M\xi)^k p_i. \quad (4.40)$$

Если возможные значения случайной величины ξ счетны, то ряд (4.40) предполагается абсолютно сходящимся.

Используя формулу бинома Ньютона (см. формулу (1.7)) и линейность математического ожидания, легко установить связь между начальными и центральными моментами:

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_k^i v_1^i v_{k-i} + (-1)^{k-1} (k-1) v_1^k, \quad (4.41)$$

где $v_k = M\xi^k$ — начальный момент k -го порядка, $v_1 = M\xi$. В частности, при $k = 1, 2, 3, 4$ получаем:

$$\mu_1 = M(\xi - M\xi) = 0 \quad (\text{см. формулу (4.30)});$$

$$\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = v_2 - v_1^2 = D\xi;$$

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = v_3 - 3v_2 v_1 + 2v_1^3;$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3 v_1 + 6v_2 v_1^2 - 3v_1^4.$$

Укажем одно из важных свойств моментов (начальных и центральных).

Теорема 4.11. Если существуют моменты k -го порядка случайной величины, то существуют ее моменты и всех порядков $s < k$.

|| Для определенности докажем теорему о существовании центральных моментов μ_s , $s < k$.

Для доказательства сумму (4.40) при $k = s$ разобьем на две части: в первой части соберем слагаемые с отклонением $|x_i - M\xi| \leq 1$ (для таких слагаемых выполняется неравенство $|x_i - M\xi| p_i \leq p_i$), а во второй части — слагаемые, где $|x_i - M\xi| > 1$ (а для них $|x_i - M\xi|^s p_i < |x_i - M\xi|^k p_i$):

$$\begin{aligned} |\mu_s| &= \left| \sum_i (x_i - M\xi)^s \right| p_i \leq \sum_i |x_i - M\xi|^s p_i = \\ &= \sum_{i: |x_i - M\xi| \leq 1} |x_i - M\xi|^s p_i + \sum_{i: |x_i - M\xi| > 1} |x_i - M\xi|^s p_i \leq \sum_i p_i + \\ &+ \sum_{i: |x_i - M\xi| > 1} |x_i - M\xi|^{ks} p_i \leq 1 + \sum_i |x_i - M\xi|^k p_i \leq M \end{aligned}$$

или окончательно

$$\sum_i |x_i - M\xi|^s p_i \leq M.$$

Это равносильно абсолютной сходимости ряда (4.40) при $k = s$ (если значения ξ счетны), т. е. существованию центрального момента s -го порядка.

Аналогично доказывается и существование моментов $v_s = M\xi^s$, если $s < k$.

4.6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СУММЫ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть заданы одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Обозначив через a и σ^2 их математическое ожидание и дисперсию соответственно, найдем математическое ожидание и дисперсию их суммы.

Теорема 4.12. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ распределены одинаково, то математическое ожидание их суммы равно na , а математическое ожидание их средней арифметической равно a .

Если же случайные величины, кроме того, и независимы, то дисперсия их суммы равна $n\sigma^2$, а дисперсия средней арифметической равна $\frac{\sigma^2}{n}$.

|| Так как математическое ожидание является аддитивным функционалом (см. теорему 4.3), то

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n = na,$$

ибо $M\xi_1 = M\xi_2 = \dots = M\xi_n = a$. Аналогично показывается, что

$$M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n) = \frac{na}{n} = a.$$

Для попарно независимых случайных величин и дисперсия является аддитивным функционалом (см. теорему 4.10). Поэтому

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n = n\sigma^2;$$

$$D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad _||$$

4.7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Случайные величины, распределенные по биномиальному закону.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с одинаковой вероятностью p .

Обозначим через ϕ_k случайную величину, выражающую число наступления события A в k -м испытании, $k = \overline{1, n}$. Нетрудно видеть, что случайные ϕ_k , ϕ_k^2 имеют одинаковые распределения

$$\begin{array}{c|c|c} \phi_k & 0 & 1 \\ \hline P & q=1-p & p \end{array}; \quad \begin{array}{c|c|c} \phi_k^2 & 0 & 1 \\ \hline P & q & p \end{array},$$

следовательно, и равные математические ожидания и дисперсии:

$$M\phi_k = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p; \quad M\phi_k^2 = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$D\phi_k = M\phi_k^2 - (M\phi_k)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq, \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть теперь случайная величина ϕ обозначает число возможных наступлений события A в каждом из n произведенных испытаний. Поэтому

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n.$$

Далее, из формулы (3.5) непосредственно следует, что $P(\phi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, т.е. введенная случайная величина ϕ подчиняется биномиальному закону распределения. Для вычисления ее числовых характеристик (математического ожидания и дисперсии) используем только что доказанную теорему 4.12. Согласно этой теореме $M\phi = np$, $D\phi = npq$.

Таким образом, получили доказательство следующего утверждения.

Теорема 4.13. Если случайная величина ξ (число наступления события A в n независимых испытаниях) распределена по биномиальному закону, то ее математическое ожидание и дисперсия определяются по формулам:

$$M\xi = np; \quad D\xi = npq, \quad (4.42)$$

где p и q — вероятности соответственно наступления и ненаступления события A в одном испытании.

Пример 4.15. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ (числа попаданий при трех выстрелах, см. пример 4.41), используя формулы (4.24), (4.33) и (4.42), и сравнить полученные результаты.

|| Ряд распределения случайной величины ξ приведен в табл. (4.5). Поэтому, используя формулы (4.24) и (4.33), находим ее математическое ожидание и дисперсию:

$$M\xi = 0 \cdot 0,343 + 1 \cdot 0,441 + 2 \cdot 0,189 + 3 \cdot 0,027 = 0,9;$$

$$M\xi^2 = 0 \cdot 0,343 + 1 \cdot 0,441 + 4 \cdot 0,189 + 9 \cdot 0,027 = 1,44;$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 1,44 - 0,81 = 0,63.$$

Те же параметры величины ξ находим по формуле (4.42):

$$M\xi = np = 3 \cdot 0,3 = 0,9; \quad D\xi = npq = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,63. \quad \parallel$$

2. Случайные величины, распределенные по геометрическому закону.

Определение 4.12. Случайная величина ξ (число произведенных независимых испытаний до первого наступления события A) распределена по геометрическому закону, если ее возможные значения образуют множество натуральных чисел, которые она принимает с вероятностью

$$P(\xi = n) = pq^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (4.43)$$

где p и q — вероятности соответственно наступления или ненаступления события A .

Используя формулу (4.43), составим ряд распределения рассматриваемой случайной величины ξ (см. также формулу (4.8), установленную в примере 4.4):

ξ	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

Нетрудно заметить, что вероятности, фигурирующие в табл. (4.8), суть члены убывающей геометрической прогрессии ($0 < q < 1$), откуда и происходит название закона распределения случайной величины ξ .

Сначала найдем ее математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M\xi &= 1 \cdot p + 2pq + 3pq^2 + \dots + npq^{n-1} + \dots = \\ &= p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots) = p(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots)' = \\ &= p \cdot \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Аналогично находим и математическое ожидание величины ξ^2 :

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= 1 \cdot p + 4pq + 9pq^2 + \dots + n^2pq^{n-1} + \dots = \\ &= p(1 + 4q + 9q^2 + \dots + n^2q^{n-1} + \dots). \end{aligned}$$

Чтобы найти сумму последнего ряда, умножим обе части равенства

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}$$

на q и затем полученное тождество дифференцируем по переменной q , т.е.

$$1 + 4q + 9q^2 + \dots + n^2 q^{n-1} + \dots = \left(\frac{q}{(1-q)^2} \right)' = \frac{1+q}{p^3}.$$

Следовательно, $M\xi^2 = p \cdot \frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$

Дисперсию находим по формуле (4.33):

$$D\xi = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Итак, получено доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.14. Если случайная величина ξ (число произведенных испытаний до первого наступления события A) распределена по геометрическому закону, то ее математическое ожидание и дисперсия определяются по формулам:

$$M\xi = \frac{1}{p}; \quad D\xi = \frac{q}{p^2}. \quad (4.44)$$

Пример 4.16. Вероятность сдачи экзамена по математике студентом в каждой попытке постоянна и равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ — числа попыток, которые использовал студент для успешной сдачи экзамена.

|| Очевидно, величина ξ подчинена геометрическому закону распределения вероятности. Поэтому неизвестные параметры находим по формулам (4.44):

$$M\xi = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,8} = 1,25; \quad D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{0,2}{(0,8)^2} = 0,3125. \quad _||$$

3. Случайные величины, распределенные по закону Пуассона.

Определение 4.13. Говорят, что случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, если она может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.45)$$

Сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)$ и выполнение условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \quad (4.46)$$

свидетельствуют о корректности определения 4.13. При суммировании ряда (4.46) мы использовали известное разложение функции e^λ в степенной ряд:

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} + \dots$$

Математическое ожидание случайной величины ξ определяем по формуле (4.24):

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^\lambda = \lambda.$$

Перед вычислением дисперсии $D\xi$ величины ξ предварительно найдем математическое ожидание ее квадрата:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } (\lambda + \lambda^2)e^\lambda &= (\lambda + \lambda^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-2)!} \right] \lambda^k = \\ &= \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}, \text{ то } M\xi^2 = e^{-\lambda} (\lambda + \lambda^2) e^\lambda = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (4.33)

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, нам удалось вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона, и одновременно выяснить теоретико-вероятностный смысл параметра λ в распределении Пуассона.

Теорема 4.15. Если случайная величина ξ распределена по закону Пуассона (4.45), то ее математическое ожидание и дисперсия равны параметру λ , т.е.

$$M\xi = D\xi = \lambda. \quad (4.47)$$

4. Случайные величины, распределенные по гипергеометрическому закону.

С таким распределением мы обычно встречаемся, когда из некоторой партии (например, объема N), содержащей различного качества изделия (стандартные и нестандартные, годные и негодные,

белые и черные и т.д.), производится выборка (например, объема n) и затем по этой выборке строится закон распределения случайной величины ξ — числа изделий, вошедших в выборку с нужным качеством (признаком). Подобная задача нами уже частично решалась, в частности в примере 2.10 получена основная формула (2.2), выражающая закон этого распределения:

$$P_n(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где N — объем партии, M — число изделий нужного качества в партии, а $P_n(\xi = m)$, как обычно, выражает вероятность того события, что в выборке объема n оказалось ровно m изделий нужного качества. Хотя по найденному распределению (2.2) случайной величины ξ можно было бы найти ее математическое ожидание и дисперсию (например, используя формулы (4.24) и (4.33)), но полученные выражения для них оказались бы слишком громоздкими, т.е. практически непригодными в приложениях. Поэтому для вычисления параметров $M\xi$ и $D\xi$ выберем другой путь, а именно используем идею, уже примененную в пункте 1) настоящего параграфа: выразим ξ через сумму более простых случайных величин. С этой целью введем событие A_k , $k = \overline{1, n}$, состоящее в том, что k -е изделие в выборке — изделие нужного качества. А теперь, определив случайную величину ξ_k как индикатор события A_k , т.е.

$$\xi_k = I_{A_k} = \begin{cases} 0, & \text{если событие } A_k \text{ не наступило,} \\ 1, & \text{если событие } A_k \text{ наступило,} \end{cases} \quad \text{где } k = \overline{1, n},$$

представим ξ в виде их суммы: $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

Чтобы вычислить параметры величин ξ_k , найдем предварительно вероятности событий A_k . Очевидно, $P(A_1) = \frac{M}{N}$ (ибо в партии объема N изделий находятся M изделий нужного качества). Далее, введем событие — гипотезу H_1 , означающую, что первое изделие выборки — изделие нужного качества (ее вероятность $P(H_1) = P(A_1) = \frac{M}{N}$). Тогда по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A_2) + P(\bar{H}_1) \cdot P_{\bar{H}_1}(A_2) = \\ &= \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{M}{N}. \end{aligned}$$

По индукции легко доказывается, что и $P(A_k) = \frac{M}{N}$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Следовательно,

$$M\xi_k = 1 \cdot \frac{M}{N} + 0 \cdot \frac{N-M}{N} = \frac{M}{N}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Поэтому

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n = n \cdot \frac{M}{N}. \quad (4.48)$$

Переходя к вычислению $D\xi$, отметим следующее. Так как величины ξ_k могут принять только два значения (либо 1, либо 0), то $\xi_k^2(\omega) = \xi_k(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Поэтому

$$\xi^2 = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 + \sum_{k \neq i} \xi_k \xi_i = \sum_{k=1}^n \xi_k + \sum_{k \neq i} \xi_k \xi_i = \xi + \sum_{k \neq i} \xi_k \xi_i.$$

Так как

$$\begin{aligned} M(\xi_k \xi_i) &= 0 \cdot P(\xi_k \xi_i = 0) + 1 \cdot P(\xi_k \xi_i = 1) = P(\xi_k = 1; \xi_i = 1) = \\ &= P(\xi_k = 1) \cdot P_{(\xi_k=1)}(\xi_i = 1) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1}, \quad \forall k, i = \overline{1, n}, \quad k \neq i, \end{aligned}$$

$$\text{то } M\xi^2 = M\left(\xi + \sum_{k \neq i} \xi_k \xi_i\right) = M\xi + \sum_{k \neq i} M(\xi_k \xi_i) = n \cdot \frac{M}{N} + n(n-1) \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1}.$$

Для вычисления дисперсии $D\xi$ воспользуемся формулой (4.33).

После несложных преобразований получим, что

$$D\xi = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}. \quad (4.49)$$

Пример 4.17. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , рассмотренной в примере 4.2.

▮ Из условия задачи и хода ее решения следует, что величина ξ — число стандартных деталей в выборке — имеет гипергеометрическое распределение с параметрами: $N = 5$ (объем партии); $M = 2$ (число стандартных деталей в партии) и $n = 3$ (объем выборки). Поэтому для нахождения ее математического ожидания и дисперсии используем формулы (4.48) и (4.49):

$$M\xi = n \cdot \frac{M}{N} = 3 \cdot \frac{2}{5} = 1,2;$$

$$D\xi = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1} = 3 \cdot \frac{2}{5} \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5-3}{5-1} = 0,36. \quad _$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Дан ряд распределения случайной величины ξ

ξ	10	20	30	40	50
P	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Построить функцию распределения вероятностей этой случайной величины.

4.2. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3.

1. Построить ряд распределения числа попаданий.

2. Составить $F(x)$.

3. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

4.3. В партии 10% деталей — нестандартные. Наудачу отобраны 4 детали. ξ — число стандартных деталей среди отобранных. Составить ряд распределения, найти $M\xi$, $D\xi$, $\sigma(\xi)$.

4.4. Дискретная случайная величина ξ принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3 . Найти x_3 и p_3 , зная, что $M = 8$.

4.5. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны 5 раз подряд извлекается шар, причем каждый раз вынутый шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Приняв за случайную величину ξ число извлеченных белых шаров, составить ряд распределения величины ξ , определить $M\xi$ и $D\xi$.

4.6. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону. Найти ее среднее квадратическое отклонение, если известны ее математическое ожидание $M\xi = 20$ и число произведенных испытаний $n = 100$.

4.7. В связке, содержащей 4 ключа, только один подходит для открывания замка. Построить ряд распределения и найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ — числа попыток, использованных для открывания замка, если: 1) при каждой попытке используются все ключи; 2) после каждой неудачной попытки из связки убирают использованный ключ.

4.8. В партии из 100 изделий содержится 80% стандартных. Из этой партии наугад выбирают 10 изделий. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ — числа стандартных изделий, содержащихся в выборке.

4.9. Проверка посещаемости занятий студентами двух учебных групп дала следующие результаты:

1-я группа:	ξ — количество пропусков занятий за 1 день учебы	0	1	2
	P	0,5	0,3	0,2
		;		

2-я группа:

η	0	1	2	3
P	0,1	0,6	0,2	0,1

1. Составить закон распределения числа пропусков занятий студентами обеих групп.

2. Проверить выполнение формул $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ и $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

4.10. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

ξ	0	2	4	6
P	0,2	0,3	0,4	0,1

η	1	2	3
P	0,4	0,3	0,3

1. Составить закон распределения их произведения.

2. Проверить справедливость формулы $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

3. Найти $M(\xi(\xi + \eta))$.

4. Составить закон распределения их средней арифметической (т.е. величины $\bar{\xi} = \frac{\xi + \eta}{2}$) и проверить, что $M\bar{\xi} = \frac{1}{2}(M\xi + M\eta)$.

4.11. На курсовом вечере в лотерее на 50 билетов разыгрывались три вещи стоимостью по 80 руб и две вещи по 100 руб.

1. Составить закон распределения суммы выигрыша для студента, купившего: а) один билет; б) два билета, если стоимость билета была 10 рублей.

2. Вычислить величину среднего выигрыша студента, купившего: а) один билет; б) два билета.

3. Показать, что случайные величины ξ и η , выражающие размеры выигрыша соответственно на 1-й и 2-й купленные билеты, независимы, и найти их ковариацию и коэффициент корреляции.

5. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА И БЕРНУЛЛИ

5.1. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Рассматривая случайные величины (или события) изолированно, мы обычно получаем очень скудные сведения об их поведении, ибо нельзя заранее предвидеть, какое из возможных значений они примут в итоге эксперимента, — результаты эксперимента обычно зависят от многих факторов, учесть которые бывает почти невозможно. Дело радикально меняется, если рассматривать случайные величины (события) в совокупности, когда их поведение с большой вероятностью уже можно предугадать, т.е. ожидаемые результаты утрачивают случайный характер. В этом состоит сущность теоремы Чебышева. Перед тем как перейти к теореме Чебышева, сначала докажем неравенство, которое тоже носит его имя.

Теорема 5.1. Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не меньше положительного числа ε , не больше чем $\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, т.е.

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) < \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (5.1)$$

Используя формулу (4.32), запишем дисперсию случайной величины ξ в виде

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i,$$

где x_i — возможные значения величины ξ , которые она принимает с вероятностью p_i . Желая оценить $D\xi$ снизу, в сумме (4.32) удержим только те слагаемые, в которых отклонение $|x_i - M\xi| \geq \varepsilon$. Следовательно,

$$D\xi \geq \sum_{x_i: |x_i - M\xi| \geq \varepsilon} (x_i - M\xi)^2 p_i \geq \varepsilon^2 \sum_{x_i: |x_i - M\xi| \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 P(|x_i - M\xi| \geq \varepsilon),$$

откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

5.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ВЕРОЯТНОСТИ

Определение 5.1. Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится по вероятности к случайной величине ξ (пишут: $\xi_n \xrightarrow{\text{вер}} \xi$), если для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0 \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) = 1. \quad (5.2)$$

Укажем одно из достаточных условий сходимости последовательности случайных величин по вероятности.

Теорема 5.2. Если для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = 0,$$

то последовательность $\xi_n - M\xi_n \xrightarrow{\text{вер}} 0, n \rightarrow \infty$.

|| Для доказательства теоремы в неравенстве Чебышева (5.1) положим $\xi = \xi_n$ и в полученном числовом неравенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - M\xi_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = 0.$$

Отсюда следует доказательство теоремы, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - M\xi_n| \geq \varepsilon) = 0,$$

ибо вероятность события не может быть отрицательным числом.

5.3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА

Пусть задана некоторая последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Как и в п. 4.6, с помощью первых n случайных величин этой последовательности образуем их среднюю арифметическую:

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}.$$

Замечен следующий замечательный факт: если значения отдельных случайных величин ξ_k могут значительно колебаться, то их средняя арифметическая $\bar{\xi}_n$ проявляет гораздо большую устойчивость, в частности их значения при достаточно большом n мало отличаются от ее математического ожидания $M\bar{\xi}_n$, т.е. их большие отклонения от $M\bar{\xi}_n$ маловероятны.

Теорема 5.3 (теорема Чебышева). Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ попарно независимы и их дисперсии равномерно ограничены, т.е.

$$D\xi_k < C, \quad \forall k,$$

то разность между их средней арифметической и ее математическим ожиданием стремится по вероятности к нулю, т.е.

$$\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n \xrightarrow{\text{вер}} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$.

|| Так как случайные величины ξ_k , $k=1, 2, 3, \dots$ попарно независимы и их дисперсии равномерно ограничены, то

$$D\bar{\xi}_n = D \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{1}{n^2} (D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Из приведенного неравенства следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} D\bar{\xi}_n = 0$, т.е. для последовательности $\bar{\xi}_n$, $n=1, 2, \dots$ выполняется условие теоремы 5.2. Следовательно, $\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n \xrightarrow{\text{в.р.}} 0$. ||

Так как события $(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geq \varepsilon)$ и $(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| < \varepsilon)$ противоположны, то

$$P(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| < \varepsilon) = 1 - P(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geq \varepsilon).$$

Отсюда, используя теорему Чебышева, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| < \varepsilon) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| \geq \varepsilon) = 1.$$

Из полученного результата заключаем, что, какое бы малое положительное число ε ни брать, вероятность выполнения неравенства $|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| < \varepsilon$ сколь угодно близка к единице, т.е. событие $(|\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n| < \varepsilon)$ является почти достоверным.

Находясь в условиях теоремы Чебышева, предположим сверх того, что рассматриваемые случайные величины имеют одинаковые математические ожидания: $M\xi_k = a$, $k=1, 2, \dots$. Тогда, как было показано в п. 4.6, и $M\bar{\xi}_n = a$. А теперь, положив в теореме Чебышева $M\bar{\xi}_n = a$, эту теорему можно прочесть в следующем виде

Следствие. Если последовательность попарно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеет равные математические ожидания, т.е. $M\xi_k = a$, $\forall k$ и их дисперсии равномерно ограничены, то $\bar{\xi}_n - a \xrightarrow{\text{в.р.}} 0$, $n \rightarrow \infty$, или подробнее

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

5.4. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Пусть производится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с одной и той же вероятностью $P(A) = p$. Как и в п. 4.7, определим случайную величину ξ_k как индикатор наступления события A при k -м испытании:

$$\xi_k = I_A^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ наступило при } k\text{-м испытании;} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ не наступило при } k\text{-м испытании.} \end{cases}$$

Тогда случайная величина (см. также формулу (2.8))

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{m}{n}$$

выражает относительную частоту появления события A в n независимых испытаниях. Так как $M\xi_k = p$, следовательно, и $M\xi_n = p$, $\forall n$, $D\xi_k = pq < 1$, $\forall k$, то к последовательности ξ_n , $n=1, 2, \dots$ применимо следствие из п. 5.3.

Итак, получено доказательство следующего утверждения (см. также теорему 3.4).

Теорема Бернулли. Если при каждом из независимых испытаний вероятность p наступления A постоянна, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Показать, что неравенство Чебышева (5.1) можно записать в форме

$$P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) > 1 - (D\xi)/\varepsilon^2.$$

5.2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|\xi - M\xi| < 0,2$, если $D\xi = 0,004$.

5.3. Известно, что $P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) < 0,2$ и $D\xi = 0,008$. Используя неравенство Чебышева, найти ε .

5.4. Пусть случайная величина η принимает только положительные значения и $C > 0$ — некоторое положительное число. Доказать, что $P(\eta > C) < \frac{M\eta}{nC^2}$.

5.5. Пусть случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, q . Проверить справедливость оценки

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

5.6. Всхожесть семян пшеницы составляет 80%.

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что из 1000 семян число взошедших будет заключено в границах от 770 до 830 включительно.

2. Можно ли применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что из 5000 семян число взошедших будет заключено в границах от 3050 до 4060?

В случае отрицательного ответа, чтобы возможным было применение неравенства Чебышева:

а) изменить левую границу, сохранив правую;

б) изменить правую границу, сохранив левую, и сравнить результаты.

6. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

6.1. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

В § 4 мы дали определение дискретной случайной величины, ввели для нее основные параметры и изучили их свойства. Пусть теперь $\{\Omega, U, P\}$ — произвольное вероятностное пространство.

Определение 6.1. Случайной величиной ξ называют всякую вещественную функцию $\xi: \Omega \rightarrow R$ такую, что при $\forall x \in R$

$$(\xi < x) = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} \in U. \quad (6.1)$$

Если U содержит все подмножества Ω , то условие (6.1) автоматически выполняется. Как и в дискретном случае, функцию распределения $F(x)$ введем как вероятность события (6.1), т.е.

$$F(x) = P(\xi < x). \quad (6.2)$$

Пример 6.1. В единичный квадрат $\{(u, v): 0 \leq u, v \leq 1\}$ брошена точка (u, v) . Считая эту точку $\omega = (u, v)$ элементарным событием, а сам квадрат — пространством элементарных исходов Ω , в качестве σ -алгебры U возьмем множество всех квадратируемых подмножеств квадрата. Предполагая, что точка (u, v) равномерно распределена в квадрате, вероятность события $A \in U$ определим как площадь подмножества A , т.е. $P(A) = \text{mes } A$. Так как всякая мера счетно-аддитивна и $P(\Omega) = \text{mes } (\Omega) = 1$, то это определение корректно и, следовательно, $\{\Omega, U, P\}$ является вероятностным пространством. А теперь на Ω определим случайную величину ξ равенством

$$\xi = \xi(\omega) = \xi(u, v) = \sqrt{u}, \quad (6.3)$$

где u — первая координата брошенной точки $\omega = (u, v)$ в квадрат Ω . Найдем функцию распределения случайной величины ξ .

|| При $0 < x < 1$ множество $(\xi < x) = \{(u, v): \xi(u, v) = \sqrt{u} < x\}$ представляет собой прямоугольник (рис. 6.1) со сторонами 1 и x^2 и площадью, равной x^2 . Поэтому $P(\xi < x) = F(x) = \text{mes}(\xi < x) = x^2$. Если $x \leq 0$, то событие $(\xi < x) = \emptyset$ невозможное. Следовательно, $P(\xi < x) = F(x) = 0$. Если же $x > 1$, то $(\xi < x) = \Omega$ — достоверное событие и его $P(\xi < x) = F(x) = P(\Omega) = 1$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

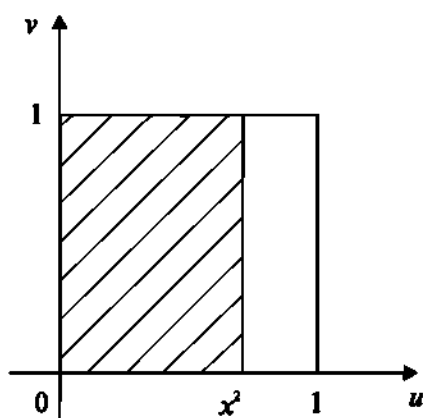


Рис. 6.1

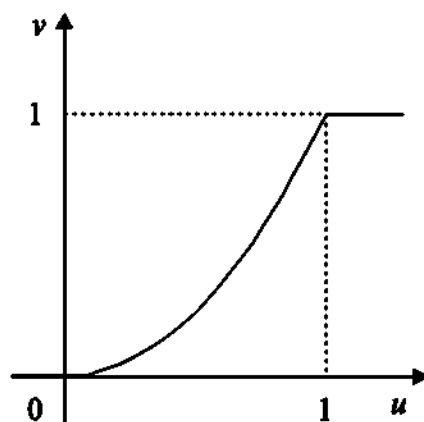


Рис. 6.2

График функции $F(x)$ изображен на рис. 6.2. ||

Определение 6.2. Случайная величина ξ называется абсолютно непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ представима в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx, \quad (6.4)$$

где $\rho(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$ — неотрицательная, кусочно-непрерывная функция, имеющая конечное число точек разрыва 1-го рода.

Определение 6.3. Функция $\rho(x)$, фигурирующая в представлении (6.4), называется плотностью распределения вероятности случайной величины ξ (или дифференциальной функцией распределения, тогда $F(x)$ называется интегральной функцией распределения).

Нетрудно видеть, что функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины обладает многими свойствами, что и функции распределения дискретных величин (см. п. 4.1). Это следует из того, что они определяются одними и теми же формулами (4.2) и (6.2). Поэтому мы ограничимся приведением только тех свойств, которые характерны для непрерывных случайных величин. Появление новых свойств функции $F(x)$ связано с тем, что она, кроме представления (6.2), имеет еще и интегральное (6.4). Но, как известно, интегрирование весьма ощутимо улучшает свойства функций.

1°. $F(x)$ непрерывна в интервале $(-\infty; \infty)$.

2°. $F(x)$ — кусочно-дифференцируема в $(-\infty; \infty)$ и

$$F'(x) = \rho(x) \quad (6.5)$$

в точках непрерывности функции $\rho(x)$.

$$3^\circ. P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx. \quad (6.6)$$

$$4^\circ. P(\xi = x) = 0 \text{ для } \forall x \in R.$$

$$5^\circ. P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = P(x_1 \leq \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 < \xi \leq x_2).$$

6°. Если x — точка непрерывности плотности $\rho(x)$, то

$$P(x < \xi < x + \Delta x) = \rho(\tau) \Delta x = \rho(x) \Delta x + o(\Delta x), \quad (6.6^*)$$

где $\tau \in (x, x + \Delta x)$.

$$7^\circ. \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1.$$

[[1°, 2°. Эти свойства следуют из свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом. Перечислим их:

а) для любой интегрируемой функции $\rho(x)$ интеграл (6.4) непрерывен;

б) если функция $\rho(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ непрерывна, то функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = \rho(x)$.

3°. Действительно, используя формулы (4.3) и (6.4), получим

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq \xi < x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \rho(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} \rho(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \rho(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} \rho(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx. \end{aligned}$$

4°. Так как $(\xi = x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x \leq \xi < x + \frac{1}{n} \right)$, то согласно теореме 1.10

$$P(\xi = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq \xi < x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right] = F(x) - F(x) = 0.$$

При завершении доказательства использовалась непрерывность $F(x)$.

5°. Это свойство немедленно следует из предыдущего, ибо, например, $(x_1 \leq \xi \leq x_2) = (x_1 \leq \xi < x_2) + (\xi = x_2)$. Справа события являются несовместными. Поэтому $P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = P(x_1 \leq \xi < x_2) + P(\xi = x_2) = P(x_1 \leq \xi < x_2)$. Остальные равенства проверяются аналогично.

6°. Пусть плотность распределения $\rho(x)$ непрерывна в интервале $(x, x + \Delta x)$. Используя формулу (6.6) и теорему о среднем значении определенного интеграла, имеем

$$P(x < \xi < x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} \rho(x) dx = \rho(\tau) \cdot \Delta x = \rho(x) \Delta x + o(\Delta x), \quad x < \tau < x + \Delta x.$$

Разделим обе части последнего равенства на Δx :

$$\frac{P(x < \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho(\tau).$$

Левая часть этого равенства является отношением вероятности попадания случайной величины ξ в интервал длины Δx к длине этого же интервала и поэтому выражает среднюю плотность распределения вероятности вдоль этого интервала. Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, справа получим плотность вероятности, вычисленную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\tau \rightarrow x} \rho(\tau) = \rho(x),$$

что полностью соответствует названию $\rho(x)$ как плотности распределения случайной величины ξ .

7°. Так как событие $(-\infty < \xi < \infty)$ достоверное, то по формуле (6.6)

$$P(-\infty < \xi < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad \parallel$$

Из формул (6.4), (6.6) и свойства 6° следует, что плотность $\rho(x)$ полностью определяет распределение вероятностей непрерывной случайной величины ξ .

Нетрудно показать обратное, что всякая неотрицательная, непрерывная функция $\rho(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$, интегрируемая на всей числовой прямой, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1,$$

является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины.

Действительно, следуя идеям пункта 2.4, построим абсолютно непрерывное вероятностное пространство $\{\Omega, U, P\}$, где $\Omega = R$ — пространство исходов, а его точки $\omega = u \in R$ — элементарные исходы; U — множество всех измеримых подмножеств из U . Вероятность на U определим по формуле (2.7), т.е. если $A \in U$, то положим

$$P(A) = \int_A \rho(x) dx.$$

Покажем, что для случайной величины, определяемой формулой

$$\xi(u) = u, \quad u = \omega \in R,$$

$\rho(x)$ является ее плотностью распределения. Действительно, в этом случае $(\xi < x) = \{u: \xi(u) = u < x\} = (-\infty, x)$. Поэтому

$$F(x) = P(\xi < x) = P(-\infty < \xi < x) = P((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx.$$

Если все возможные значения случайной величины ξ лежат в интервале (a, b) , то $F(x) \equiv 0$ (следовательно, и $\rho(x) \equiv 0$) для $\forall x \in (-\infty, a)$ и

$F(x) \equiv 1$ (следовательно, и $\rho(x) \equiv 0$) для $\forall x \in (b, \infty)$, ибо в этом случае события $(\xi < x) = \emptyset$ невозможны при $x \leq a$, и тогда $F(x) = P(\emptyset) = 0$, а события $(\xi < x) = \Omega$ достоверны для $\forall x \in (b, \infty)$, и тогда $F(x) = P(\Omega) = 1$. Для таких случайных величин формулы (6.4) и (6.7) примут вид

$$F(x) = \int_a^x \rho(x) dx; \quad (6.4)^*$$

$$\int_a^b \rho(x) dx = 1. \quad (6.7)^*$$

Пример 6.2. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид $F(x) = \alpha + \beta \arctg x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

1. Определить постоянные α и β .

2. Найти плотность вероятности.

3. Найти вероятность $P(-1 < \xi < 1)$.

|| 1. Так как $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha + \beta \arctg x) = \alpha + \beta \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha + \beta \arctg x) = \alpha + \beta \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Из полученной системы находим неизвестные параметры α и β :

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{\pi}$. Следовательно, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$.

2. Плотность распределения $\rho(x)$ находим по формуле (6.5):

$$\rho(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x \right)' = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

3. Для отыскания вероятности того, что ξ окажется в интервале $(-1, 1)$, используем формулу (4.3):

$$\begin{aligned} P(-1 < \xi < 1) &= F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(-1) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}. \quad || \end{aligned}$$

Пример 6.3. Плотность распределения случайной величины ξ равна

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha \cos x & \text{при } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Определить коэффициент α .
2. Найти функцию распределения.
3. Построить график функций $\rho(x)$ и $F(x)$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cdot \cos x \, dx = \alpha \cdot \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\alpha = 1.$$

Отсюда $\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & \text{при } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

2. Функцию распределения восстанавливаем по формуле (6.4)*:

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^x = \frac{1}{2}(\sin x + 1), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$F(x) = 0 \text{ для } \forall x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ и } F(x) = 1 \text{ для } \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right).$$

3. Графики функций $\rho(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 6.3 и 6.4. $\square$

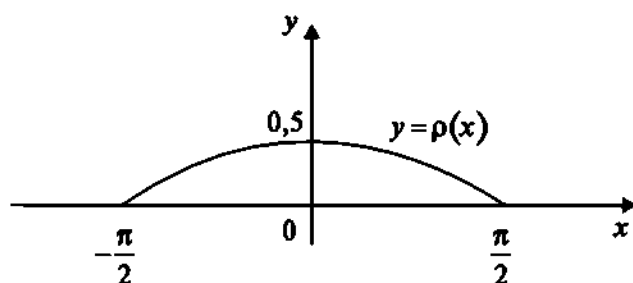


Рис. 6.3

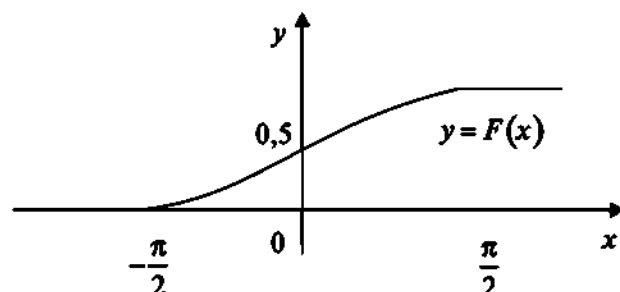


Рис. 6.4

Определение 6.4. График плотности распределения случайной величины ξ называется кривой ее распределения.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Функция распределения случайной величины задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

1) Определить коэффициент a . 2) Найти плотность вероятности $\rho(x)$. 3) Найти вероятность попадания ξ в интервал $(0,25; 0,5)$.

6.2. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулой

$$\rho(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in [0, \pi]; \\ 0, & x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

1) Найти коэффициент a .

2) Построить функцию распределения $F(x)$.

3) Найти вероятность попадания величины ξ в интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

6.3. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулой $\rho(x) = \frac{a}{\pi(1+x^2)}$, $x \in R$ (распределение Коши).

Найти вероятность $P(-1 < \xi < 1)$.

6.4. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$\rho(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in R.$$

1) Найти параметр a . 2) Восстановить функцию распределения $F(x)$. 3) Вычислить $P(\alpha \leq \xi \leq \beta)$.

6.5. Функция распределения случайной величины задана формулой

$$F(x) = a + b \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in R.$$

1) Определить параметры a и b . 2) Найти плотность распределения. 3) Вычислить вероятность $P(-1 \leq \xi \leq 1)$.

7. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

7.1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Пусть непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения $\rho(x)$, и кроме того, предположим, что ее возможные значения принадлежат отрезку $[a, b]$. Желая определить математическое ожидание непрерывной случайной величины по аналогии с дискретной, разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков с длинами соответственно $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и затем, выбрав в каждом из частичных отрезков возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ величины ξ , составим интегральную сумму, которую и примем за приближенное значение математического ожидания величины ξ , т.е.

$$\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i \approx M\xi, \quad (7.1)$$

где величина $p_i = \rho(x_i) \Delta x_i$ приближенно равна вероятности попадания ξ в i -й отрезок. За истинное значение $M\xi$, естественно, можно принять предел суммы (7.1):

$$M\xi = \lim_{d_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i) \Delta x_i = \int_a^b x \rho(x) dx, \quad (7.2)$$

где $d_n = \max_{i=1, n} \{\Delta x_i\}$. Так как плотность распределения $\rho(x)$ кусочно-непрерывна, то интеграл (7.2) существует, следовательно, существует для ξ и ее математическое ожидание $M\xi$.

Если возможные значения ξ лежат на всей оси Ox , то $M\xi$ определяется уже несобственным интегралом

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (7.3)$$

причем $M\xi$ существует, если интеграл (7.3) сходится абсолютно, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \rho(x) dx \leq L,$$

где L — некоторое вещественное число.

7.2. ДИСПЕРСИЯ И СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Дисперсия непрерывной величины определяется так же, как и дисперсия дискретной величины.

Определение 7.1. Дисперсией случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения, т.е. $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Так как величины ξ и $(\xi - M\xi)^2$ имеют равные плотности распределения, то

$$D\xi = \int_a^b (x - Mx)^2 \rho(x) dx, \quad (7.4)$$

если возможные значения ξ принадлежат отрезку $[a, b]$, и

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Mx)^2 \rho(x) dx, \quad (7.5)$$

если возможные значения ξ принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty, \infty)$.

По аналогии с дискретным случаем определяется и среднее квадратическое отклонение непрерывной величины ξ :

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}. \quad (7.6)$$

Обычно для вычисления дисперсии используют более удобные формулы:

$$\begin{aligned} D\xi &= \int_a^b x^2 \rho(x) dx - (M\xi)^2; \\ D\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx - (M\xi)^2, \end{aligned} \quad (7.7)$$

которые являются простым следствием формул (7.4) и (7.5).

Пример 7.1. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(см. пример 6.1). Найти: 1) плотность вероятности $\rho(x)$; 2) $M\xi$ и $D\xi$; 3) $P\left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right)$; 4) построить кривую распределения.

▮ 1) Используя формулу (6.5), найдем плотность распределения:

$$\rho(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

2) Для вычисления математического ожидания и дисперсии воспользуемся формулами (7.2) и (7.4):

$$M\xi = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}; \quad D\xi = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

3) По формуле (6.6) найдем вероятность того, что величина ξ примет значение, принадлежащее отрезку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$P\left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4}.$$

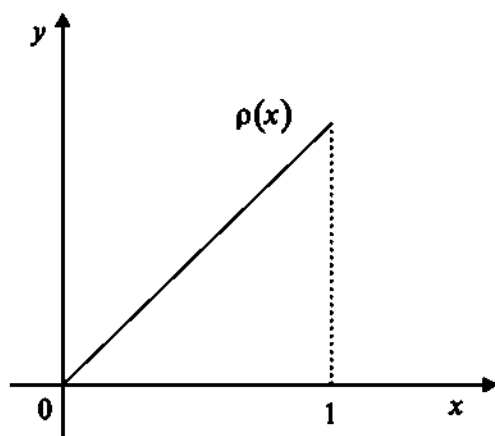


Рис. 7.1

4) На рис. 6.2 и 7.1 изображены графики функций $F(x)$ и $\rho(x)$

В дальнейшем изложении рассмотрим наиболее употребительные в приложениях распределения непрерывных величин, найдем их основные числовые характеристики и укажем некоторые их применения.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Функция распределения случайной величины ξ равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

7.2. Случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2-2x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найти $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$ и вычислить $P\left(\frac{1}{3} < \xi < 2\right)$.

7.3. Функция распределения случайной величины ξ задана формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

1) Найти параметр a . 2) Вычислить $M\xi$, $D\xi$ и вероятность $P(0,5 < \xi < 0,7)$.

8. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 8.1. Показательным называется распределение, которое описывается плотностью распределения

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

где λ — постоянная положительная величина.

Из определения непосредственно следует, что возможные значения величины ξ лежат в полубесконечном интервале $[0, \infty)$, а само распределение характеризуется только одним параметром λ , что важно бывает в приложениях. Учитывая, что $\rho(x) \equiv 0, \forall x \in (-\infty, 0)$, по формуле (6.4) найдем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Для вычисления других числовых характеристик используем формулы (7.3), (7.7) и (7.6):

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx, \quad v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right\} = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}; \quad D\xi = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{применяем метод интегри-} \\ \text{рования по частям дважды} \end{array} \right\} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}; \\ \sigma(\xi) &= \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили очень важный теоретико-вероятностный результат: математическое ожидание и среднее квадрати-

ческое отклонение показательного распределения равны между собой и равны обратной величине параметра λ .

Замечание 8.1. На практике полученный результат можно использовать в двух направлениях.

1. Предположим, известно, что изучаемая случайная величина распределена по показательному закону, но его параметр λ неизвестен (как и математическое ожидание). Тогда для отыскания параметра поступают следующим образом: находят приближенное значение математического ожидания, взяв, например, за его значение выборочную среднюю $\bar{x}$. Затем в качестве приближенного значения параметра λ берут величину $\frac{1}{\bar{x}}$, т.е. получают $\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

2. Допустим теперь, что неизвестно распределение, но есть большие основания думать, что величина ξ распределена по показательному закону. Для проверки достоверности этой гипотезы находят (хотя бы приближенно) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. В случае их равенства заключают, что сделанные предположения о характере распределения являются верными.

Найдем теперь вероятность того, что случайная величина примет возможное значение, принадлежащее отрезку $[a, b]$. Из формул (4.3) и (8.2) следует, что

$$P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \quad (8.3)$$

Ниже укажем одно из важных приложений показательного закона в теории надежности.

8.2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ

В дальнейшем любое устройство (прибор, телефон, радиосхема и т.д.) будем называть просто элементом. Нас будут интересовать вопросы надежности работы этого элемента. С этой целью введем случайную величину T — время, которое выражает длительность времени безотказной работы элемента. А теперь построим множество $(T < t)$ (см. формулы (4.1) и (6.2)) и выясним его физический смысл. С этой целью предположим, что величина T приняла возможное значение $T = t_1 < t$. Это означает, что осуществилось событие, заключающееся в том, что в момент времени $T = t_1$ произошел отказ в работе элемента. Так как точка t_1 — произвольная точка множества $(T < t)$, то множество $(T < t)$ является совокупностью отказов за время t в работе элемента. Тогда функция распределения $F(t) = P(T < t)$ выражает вероятность отказа работы за время t .

Событие $(T > t)$, являясь противоположным к событию $(T < t)$, означает безотказную работу за время t . Его вероятность, т.е. величину

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \quad (8.4)$$

называют *функцией надежности*.

Если случайная величина T имеет показательное распределение, то ее функции распределения и надежности имеют соответственно следующие представления:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

И в этом случае функцию

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (8.5)$$

называют *показательным законом надежности*, а параметр λ — *интенсивностью отказа*.

Пример 8.1. Случайная величина T — время работы радиолампы — имеет показательное распределение

$$\rho(t) = \frac{1}{300} e^{-t/300}.$$

1. Доказать, что среднее значение время работы радиолампы 300 часов.

2. Найти вероятность отказа работы радиолампы за промежуток времени от 150 до 450 часов.

3. Какова вероятность того, что лампа будет работать не менее 600 часов?

|| 1. Из вида функции плотности распределения непосредственно следует, что интенсивность отказа $\lambda = \frac{1}{300}$. Далее, среднее время работы радиолампы равно математическому ожиданию $M(T)$. Но для показательного распределения $M(T) = \frac{1}{\lambda}$. Следовательно, $M(T) = 1 : \frac{1}{300} = 300$ часов.

2. Искомую вероятность вычисляем по формуле (8.3):

$$P(150 \leq t \leq 450) = e^{-\frac{150}{300}} - e^{-\frac{450}{300}} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e\sqrt{e}} = 0,3835.$$

3. Эту вероятность находим как значение функции надежности (8.5) при $t = 600$:

$$R(600) = P(T > 600) = e^{-600/300} = \frac{1}{e^2} = 0,1352. \quad ||$$

Замечание 8.2. Показательный закон надежности (как и сам закон распределения) обладает важным свойством, характерным только для этого закона: безотказная работа элемента до некоторого момента t_0 не влияет на вероятность безотказной работы элемента в последующем временном интервале (t_0, t) , а зависит только от длительности (длины) этого интервала.

Это свойство является важным индикатором для распознавания типа закона распределения, если этот закон заранее не был известен.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Вероятность обнаружения цели за время наблюдения t задается формулой $F(t) = 1 - e^{-0.2t}$, где t измеряется в минутах. Каково среднее время наблюдения, необходимое для обнаружения цели?

8.2. Закон распределения времени восстановления неисправной аппаратуры считается показательным с плотностью распределения $\rho(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где λ — интенсивность ремонта. Какова вероятность того, что за 5 часов аппаратура будет восстановлена, если интенсивность ремонта $0,2 \frac{1}{\text{час}}$?

8.3. Случайная величина T — время работы лампы большой мощности, применяемой при фотосъемке, подчиняется показательному закону распределения: $F(t) = 1 - e^{-t/20}$, $0 \leq t < \infty$ (в часах). Доказать, что среднее время работы лампы 20 часов. Какова вероятность того, что лампа будет работать 30 часов?

8.4. Случайная величина T — время работы радиолампы — имеет показательное распределение

$$\rho(t) = \frac{1}{500} e^{-t/500}.$$

1. Доказать, что среднее время работы радиолампы 500 часов.

2. Какова вероятность того, что лампа будет работать:

а) не менее 500, но не более 1000 часов;

б) не более 1000 часов;

в) не менее 750 часов?

9. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 9.1. *Равномерным* называют распределение вероятностей случайной величины ξ , которое описывается плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b; \\ 0, & \text{если } x \geq b. \end{cases} \quad (9.1)$$

Из представления плотности вероятности (9.1) непосредственно следует, что все возможные значения ξ принадлежат отрезку $[a, b]$. Причем если отрезок $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$, то $P(x < \xi < x + \Delta x) = \rho(x) \cdot \Delta x = \frac{1}{b-a} \cdot \Delta x$ (см. формулу (6.6)*), т.е. вероятность принятия величиной ξ значения из некоторого интервала прямо пропорциональна длине этого интервала, где коэффициентом пропорциональности служит именно плотность $\rho(x) = \frac{1}{b-a}$. Это свойство характеризует равномерное изменение вероятности $P(x < \xi < x + \Delta x)$ в зависимости от длины интервала, которому принадлежат значения ξ . Для нахождения функции распределения и числовых характеристик величины ξ воспользуемся формулами (6.4), (7.2) и (7.7):

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b; \\ 1, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$$

$$M\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$D\xi = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

На рис. 9.1 и 9.2 изображены графики функций $\rho(x) = \frac{1}{b-a}$ и $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

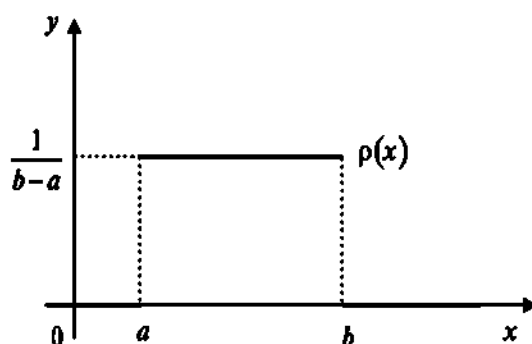


Рис. 9.1

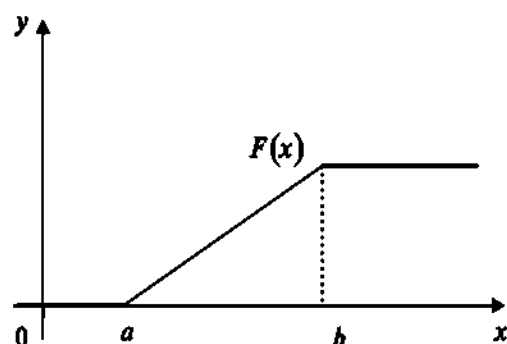


Рис. 9.2

Пример 9.1. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение с плотностью распределения

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ h, & 1 \leq x < 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Найти: параметр h ; функцию $F(x)$; $M\xi$; $D\xi$; $P(3 < \xi < 5)$.

|| Так как $\int_1^5 \rho(x) dx = 1$, то $\int_1^5 h dx = 1 \Rightarrow 4h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{4}$. Следовательно, $\rho(x) = \frac{1}{4}$, $x \in [1, 5)$. Для нахождения остальных параметров используем формулы, полученные в начале параграфа, полагая $a = 1$; $b = 5$:

$$F(x) = \frac{x-1}{4}, \quad x \in [1, 5); \quad M\xi = \frac{1+5}{2} = 3; \quad D\xi = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{4}{3};$$

$$\sigma(\xi) = \frac{5-1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad ||$$

Замечание 9.1. В приложениях часто приходится рассматривать случайные величины ξ , распределенные равномерно на отрезке $[0, 1]$. Нетрудно проверить, что в этом случае их характеристики имеют самый простой вид, причем: $\rho(x) \equiv 1$, $F(x) = x$, $x \in [0, 1]$; $M\xi = \frac{1}{2}$; $D\xi = \frac{1}{12}$ и $\sigma(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. К этому распределению приводится решение задач, связанных с измерением некоторых физических величин, в частности при округлении полученных результатов.

Пример 9.2. Производятся измерения прибором, шкала которого проградуирована в некоторых единицах. Найти числовые характеристики случайной величины ξ , выражающей величину ошибки при

округлении отсчета до ближайшего деления, предполагая, что ξ распределена равномерно.

|| Задача приводится к примеру, рассмотренному в предыдущем замечании. За единичный отрезок нужно взять промежуток, образованный соседними делениями шкалы. ||

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Дана функция распределения случайной величины ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ Ax + B, & -2 < x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Найти: 1) параметры A и B ; 2) плотность распределения $\rho(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 2)$.

9.2. Известно, что случайная величина ξ в интервале $(2; 10)$ распределена равномерно. Найти:

1) ее функцию и плотность распределения ее вероятности; 2) вероятность попадания ее на отрезок $[4, 8]$.

9.3. Минутная стрелка электрических часов передвигается скачками поминутно. Считая истинное время в данный момент случайной величиной T , найти ее функцию распределения, если в данный момент часы показывают a минут.

9.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , если известна ее функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

9.5. Вращающееся колесо останавливается вследствие трения. Угол ξ , образованный некоторым фиксированным подвижным радиусом колеса с неподвижным радиусом после остановки колеса, есть случайная величина с плотностью распределения

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [0, 2\pi], \\ 0, & x \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Найти $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma(\xi)$, $P(\pi \leq \xi \leq 2\pi)$.

10. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 10.1. *Нормальным* называется распределение непрерывной случайной величины ξ , которое описывается плотностью

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (10.1)$$

где a и $\sigma > 0$ — некоторые параметры.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальное распределение называется *нормированным*. В этом случае плотность имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Эта функция нами уже использовалась в п. 4.1 при установлении асимптотических формул в биномиальном распределении. Там же указаны ее основные свойства.

Если же параметры a и σ произвольны, то нормальное распределение называется *общим*. Между нормированным и общим распределениями существует линейная зависимость: $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$, где предполагается, что величина ξ имеет общее распределение. В этом случае $M\eta = \frac{1}{\sigma}(M\xi - a) = \frac{1}{\sigma}(a - a) = 0$; $D\eta = \frac{1}{\sigma^2}(D\xi - Da) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$, т.е. величина η имеет уже нормированное распределение.

А теперь выясним вероятностный смысл параметров a и σ , входящих в представление плотности (10.1). С этой целью найдем математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины ξ . Согласно определению математического ожидания (см. формулу (7.3))

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = \left\{ \frac{x-a}{\sigma} = t, \quad dx = \sigma dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2} dt + a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 + a\sqrt{2\pi}) = a. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по симметричному промежутку, второй интеграл — интеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

Итак, $M\xi = a$, т.е. математическое ожидание нормального распределения равно параметру a .

По определению дисперсии (см. формулу (7.5))

$$\begin{aligned} D\xi &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем ту же} \\ \text{замену: } \frac{x-a}{\sigma} = t \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u=t, \quad du=dt \\ dv=t e^{-t^2/2} dt, \quad v=-e^{-t^2/2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) = \sigma^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\sigma(\xi) = \sigma$.

Итак, среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру σ .

Для нормированной нормальной величины η ее функция распределения определяется формулой

$$F_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Используя интегралы Пуассона и Лапласа (см. п. 4.1)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt,$$

функцию $F_{\eta}(x)$ можно записать в более компактной форме:

$$F_{\eta}(x) = 0,5 + \Phi(x).$$

Эта формула полезна еще тем, что значения функции Лапласа $\Phi(x)$ табулированы (см. приложение 3). Аналогичной формулой можно записать и функцию распределения $F(x)$ общего нормального распределения:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(z-a)^2/2\sigma^2} dz = \left\{ \begin{array}{l} \frac{z-a}{\sigma} = t; \\ \left\{ \begin{array}{l} z=x, \\ t = \frac{x-a}{\sigma} \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = \end{aligned}$$

$$= 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \text{ или } F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (10.2)$$

Используя последнюю формулу, легко найти вероятность попадания нормальной величины ξ в промежуток $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq \xi \leq \beta) &= F(\beta) - F(\alpha) = 0,5 + \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - 0,5 - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (10.3)$$

Пример 10.1. Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$.

1. Написать уравнения ее плотности и функции распределения.
2. Найти $P(1 < \xi < 4)$.

|| 1. Для написания уравнений плотности и функции распределения воспользуемся формулами (10.1) и (10.2):

$$\rho(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/50}; \quad F(x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(x-2)/5} e^{-t^2/2} dt.$$

2. Согласно формуле (10.3)

$$P(1 < \xi < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{5}\right) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,2).$$

Так как функция Лапласа нечетная (см. п. 4.1), то $\Phi(-0,2) = -\Phi(0,2)$. Следовательно, $P(1 < \xi < 4) = \Phi(0,4) + \Phi(0,2)$. По таблице находим $\Phi(0,4) = 0,1554$, $\Phi(0,2) = 0,0793$. Тогда искомая вероятность равна $P(1 < \xi < 4) = 0,1554 + 0,0793 = 0,2347$. ||

10.2. ВЕРОЯТНОСТЬ ЗАДАННОГО ОТКЛОНЕНИЯ. ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Часто ставится задача о нахождении вероятности того, чтобы отклонение случайной величины ξ по абсолютной величине было меньше заданного числа δ , т.е. $P(|\xi - a| < \delta)$, где $a = M\xi$.

Так как неравенства $|\xi - a| < \delta$ и $a - \delta < \xi < a + \delta$ эквивалентны, то события $(|\xi - a| < \delta) = (a - \delta < \xi < a + \delta)$. Поэтому равны и их вероятности:

$$P(|\xi - a| < \delta) = P(a - \delta < \xi < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a - a + \delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \\ \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Таким образом, искомая вероятность

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \quad (10.4)$$

и задача, поставленная в начале пункта, решена.

Пользуясь произволом в выборе числа δ , в формуле (10.4) положим $\delta = 3\sigma$:

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{из таблицы находим} \\ \Phi(3) = 0,49865 \end{array} \right\} = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973,$$

т.е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше 3σ , достаточно высока и почти равна единице, следовательно, вероятность противоположного события почти равна нулю, т.е. событие, заключающееся в том, что отклонение по абсолютной величине будет больше утроенного среднего квадратического отклонения (трех сигм), маловероятно. В этом и заключается правило трех сигм.

Пример 10.2. Диаметр изготавливаемой детали является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения с параметрами $a = 6,5$ см и $\sigma = 0,04$ см. Выбирается наудачу деталь. Найти вероятность того, что размер ее диаметра не превзойдет истинного более чем на $\delta = 0,08$ см.

|| Искомую вероятность находим по формуле (10.4):

$$P(|\xi - 6,5| < 0,08) = 2\Phi\left(\frac{0,08}{0,04}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,47725 = 0,9545. \quad _||$$

10.3. НОРМАЛЬНАЯ КРИВАЯ

Определение 10.2. График плотности

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

нормального распределения называется *нормальной кривой* (кривой Гаусса).

Используя методы дифференциального исчисления, установим основные свойства $\rho(x)$ и сделаем чертеж.

1. Функция $\rho(x)$ определена для $\forall x \in (-\infty, \infty)$ и принимает только положительные значения, т.е. $\rho(x) > 0$.

2. Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} = 0,$$

то нормальная кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

3. Поскольку

$$\rho(a \pm t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(a \pm t - a)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2},$$

то нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$.

4. Найдем производные 1-го и 2-го порядков. Имеем

$$\rho'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}; \quad (10.5)$$

$$\rho''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \cdot \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (10.6)$$

Из формулы (10.5) следует, что точка $x = a$ (в этой точке $\rho'(a) = 0$) является точкой возможного экстремума. Поскольку $\rho''(a) < 0$, то в этой точке $\rho(x)$ имеет максимум, равный

$$\rho_{\max} = \rho(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \quad (10.7)$$

5. Из формулы (10.6) следует, что вторая производная обращается в нуль в точках $x = a + \sigma$ и $x = a - \sigma$. Так как при переходе через эти точки она меняет знак, то точки $(a - \sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi e}))$ и $(a + \sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi e}))$ являются точками перегиба нормальной кривой.

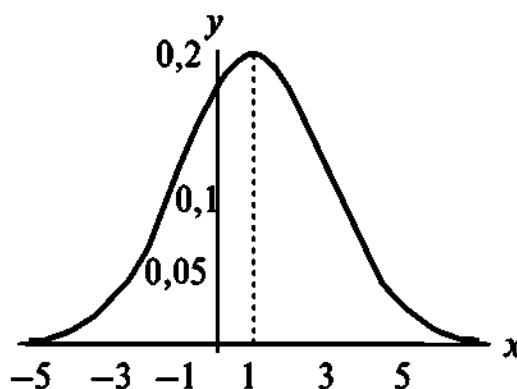


Рис. 10.1

На рис. 10.1 изображена нормальная кривая при $a = 1$ и $\sigma = 2$.

А теперь подробнее рассмотрим вопрос о влиянии параметров a и σ на форму нормальной кривой.

Чтобы изучить влияние параметра a на форму кривой, сделаем параллельный перенос оси Ox : $x - a = t$. Тогда уравнение плотности примет вид

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2},$$

т.е. все эти кривые при постоянном значении параметра σ имеют одно и то же представление. Следовательно, форма этих кривых не зависит от значения параметра a — параметр a влияет только на расположение кривой.

Чтобы исследовать влияние параметра σ на форму кривой, рассмотрим поведение величины $\rho_{\max} = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$ в зависимости от изменения параметра σ . Нетрудно видеть, что

$$\rho_{\max} = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{при } \sigma \rightarrow +0, \\ 0 & \text{при } \sigma \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

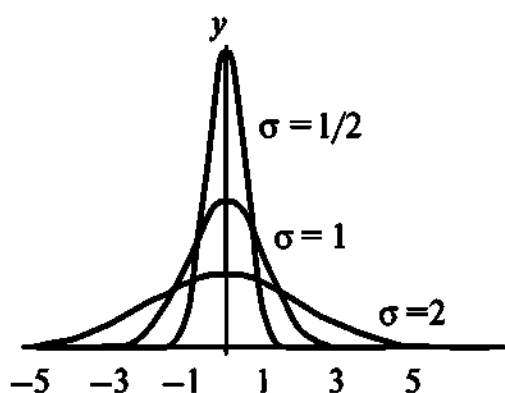


Рис. 10.2

Но интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$ для $\forall \sigma > 0$ и геометрически выражает величину площади бесконечной трапеции, ограниченной нормальной кривой и осью Ox . Следовательно, при $\sigma \rightarrow 0$ ветви нормальных кривых должны бесконечно «прижиматься» к оси симметрии $x = a$, а при $\sigma \rightarrow +\infty$ — равномерно (плавно) к оси Ox (рис. 10.2).

На рис. 10.2 изображены нормальные кривые, имеющие различные средние квадратические

отклонения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}$, но одинаковые математические ожидания $a = 0$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 20$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$.

1. Написать уравнения ее плотности и функции распределения.
2. Вычислить : а) $P(10 < \xi < 40)$ и б) $P(|\xi - 20| < 20)$.

10.2. Размер диаметра детали, производимой заводом, подчиняется нормальному закону с параметрами $a = 8$ см: $\sigma = 0,5$ см. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали: а) заключен в границах от 7,5 до 8,8 см; б) отличается от математического ожидания не более чем на 0,8 см.

10.3. Масса пойманной рыбы описывается нормальным законом с параметрами $a = 525$ г, $\sigma = 50$ г. Найти вероятность того, что масса

наугад извлеченной рыбы составит: 1) от 450 до 600 г; 2) не менее 475 г; 3) не более 625 г.

10.4. Известны математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ , распределенной нормально: $a = 32$ см и $\sigma^2 = 4$ см². Найти интервал, в котором с вероятностью 0,96 может оказаться случайная величина ξ .

10.5. Рост взрослого мужчины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть ее математическое ожидание равно 170 см и среднее квадратическое отклонение равно 6 см.

Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наугад выбранных четырех мужчин имеет рост от 168 до 172 см.

11. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

11.1 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$ заданы n случайных величин $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $k = \overline{1, n}$.

Определение 11.1. Величина $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, где $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $k = \overline{1, n}$, называется *n -мерной случайной величиной* (n -мерной случайной точкой (вектором)), а величины ξ_k называются *компонентами* (составляющими) ζ .

Пример 11.1. Производятся измерения изготовленных железных плиток, имеющих прямоугольную форму. Тогда величина $\zeta = (\xi_1, \xi_2)$, где ξ_1 и ξ_2 — полученные размеры длины и ширины плиток, является двумерной величиной. Если бы контролировалась и высота ξ_3 , мы имели бы трехмерную величину $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Предположим, что подмножества

$$A = \{\xi_k < x_k, k = \overline{1, n}\} = \{\omega \in \Omega : \xi_k(\omega) < x_k, k = \overline{1, n}\} \in U$$

для $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$.

Определение 11.2. Вероятность события A , т.е.

$$P(\xi_k < x_k, k = \overline{1, n}) = F_\zeta(x), \quad (11.1)$$

называется *многомерной (совместной) функцией распределения* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, т.е. n -мерного вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Более подробно рассмотрим двумерный случай: $\zeta = (\xi, \eta)$. Тогда множество $(\xi < x, \eta < y)$ представляет бесконечный квадрант, расположенный левее и ниже его вершины (x, y) , и тогда величина (11.1) выражает вероятность

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) \quad (11.2)$$

попадания случайной величины (ξ, η) в этот квадрант. На рис. 11.1 этот квадрант заштрихован. Из закона совместного распределения $F(x, y)$ случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ легко получить закон распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ ее составляющих ξ и η .

Действительно, так как события $(\xi < x) = (\xi < x, \eta < \infty)$, то $P(\xi < x) = P(\xi < x, \eta < \infty)$ или

$$F_\xi(x) = F(x, \infty). \quad (11.3)$$

Аналогично проверяется, что

$$F_{\eta}(y) = F(\infty, y) \quad (11.4)$$

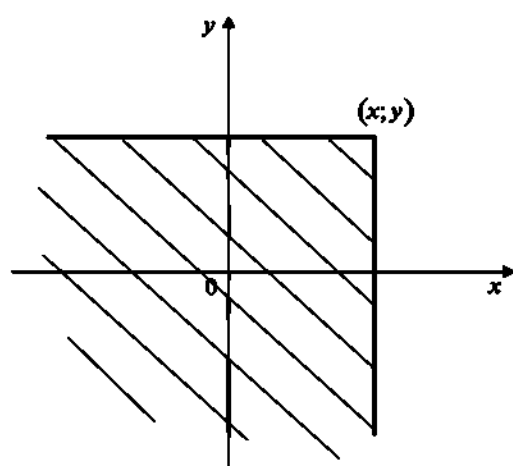


Рис. 11.1

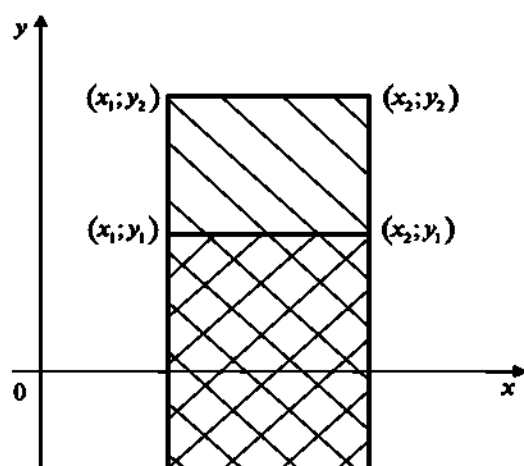


Рис. 11.2

Используя основное представление (11.2), легко найти вероятность попадания точки (ξ, η) в произвольный прямоугольник:

$$B = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}.$$

Событие, заключающееся в попадании точки (ξ, η) в указанный прямоугольник, можно записать в виде (рис. 11.2)

$$\begin{aligned} (x_1 \leq \xi \leq x_2, y_1 \leq \eta \leq y_2) &= (x_1 \leq \xi \leq x_2, \eta \leq y_2) \setminus (x_1 \leq \xi \leq x_2, \eta \leq y_1) = \\ &= [(\xi \leq x_2, \eta \leq y_2) \setminus (\xi \leq x_1, \eta \leq y_2)] \setminus [(\xi \leq x_2, \eta \leq y_1) \setminus (\xi \leq x_1, \eta \leq y_1)]. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно находим искомую вероятность:

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq \xi \leq x_2, y_1 \leq \eta \leq y_2) &= P[(\xi \leq x_2, \eta \leq y_2) \setminus (\xi \leq x_1, \eta \leq y_2)] - \\ &- P[(\xi \leq x_2, \eta \leq y_1) \setminus (\xi \leq x_1, \eta \leq y_1)] = P(\xi \leq x_2, \eta \leq y_2) - \\ &- P(\xi \leq x_1, \eta \leq y_2) - P(\xi \leq x_2, \eta \leq y_1) + P(\xi \leq x_1, \eta \leq y_1) = \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \end{aligned}$$

$$\text{или } P(\zeta \in B) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (11.5)$$

Пример 11.2. Пусть $\{\Omega, U, P\}$ — вероятностное пространство, построенное в примере 6.1. На Ω определим случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\xi = \xi(\omega) = u,$$

$$\eta = \eta(\omega) = v,$$

где u, v — координаты брошенной точки $\omega = (u, v)$ в квадрант Ω .
Найти: 1) распределение случайного вектора $\zeta = (\xi, \eta)$; 2) вероятность попадания брошенной точки в квадрант

$$B = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} \leq u, v \leq 1 \right\}.$$

|| 1) Если $0 < x, y < 1$, то множество $(\xi < x, \eta < y) = \{(u, v) \in \Omega : \xi(u, v) = u < x; \eta(u, v) = v < y\}$ представляет прямоугольник со сторонами x и y (на рис. 11.3 он заштрихован) и площадью, равной xy . Поэтому $P(\xi < x, \eta < y) = F(x, y) = \text{mes}(\xi < x, \eta < y) = xy$. Если же $x \leq 0$ или $y \leq 0$, то событие $(\xi < x, \eta < y) = \emptyset$ — невозможное. Поэтому его вероятность $P(\xi < x, \eta < y) = F(x, y) = P(\emptyset) = 0$. Если же $x, y > 1$, то событие $(\xi < x, \eta < y) = \Omega$ — достоверное. Следовательно, $F(x, y) = 1$.

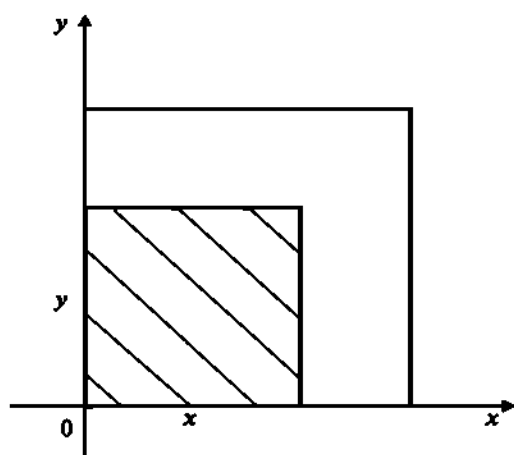


Рис. 11.3

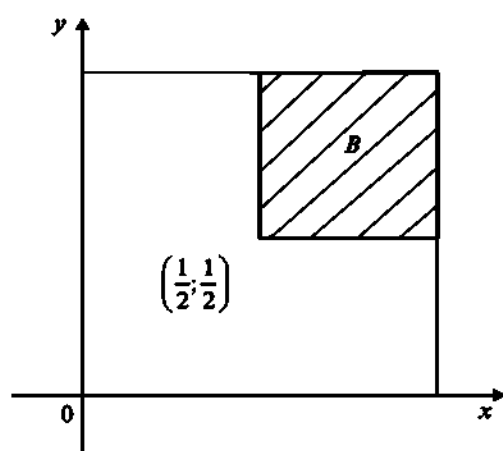


Рис. 11.4

Итак, двумерная случайная величина, рассмотренная в примере (11.2), имеет следующее распределение:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ xy, & \text{если } 0 \leq x, y \leq 1; \\ 1, & \text{если } x, y > 1. \end{cases}$$

2) Для вычисления вероятности попадания брошенной точки в квадрат B (рис. 11.4) используем формулу (11.5):

$$\begin{aligned} P(\zeta \in B) &= F(1, 1) - F\left(\frac{1}{2}, 1\right) - F\left(1, \frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \quad \text{||} \end{aligned}$$

Функция распределения $z = F(x, y)$ двумерной величины в пространстве $Oxyz$ изображает некоторую поверхность, называемую поверхностью распределения.

11.2. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 11.3. Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ называется *абсолютно непрерывной*, если ее функция распределения $F(x, y)$ имеет представление

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \rho(x, y) dx dy, \quad (11.6)$$

где неотрицательная функция $\rho(x, y)$, называемая плотностью распределения ζ , непрерывна в области ее задания, за исключением конечного числа кривых, в которых она терпит разрыв 1-го рода.

Из формулы (11.6) непосредственно следует, что в точках непрерывности плотности

$$\rho(x, y) = F''_{xy}(x, y). \quad (11.7)$$

Эта формула позволяет найти плотность распределения случайной величины, если известна ее функция распределения.

Используя формулу (11.5) и аддитивность двойного интеграла, легко вычисляется вероятность попадания случайной точки в любой прямоугольник $B = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$. Справедлива следующая формула:

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2; y_1 \leq \eta \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho(x, y) dx dy.$$

Взяв в качестве пределов интегрирования последнего интеграла $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, $y_1 = y$ и $y_2 = y + \Delta y$, применим к полученному интегралу теорему о среднем. Тогда

$$\begin{aligned} P(x \leq \xi \leq x + \Delta x; y \leq \eta \leq y + \Delta y) &= \rho(\bar{x}, \bar{y}) \Delta x \Delta y = \\ &= \rho(x, y) \Delta x \Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right). \end{aligned}$$

Тогда соотношение

$$\frac{P(x \leq \xi \leq x + \Delta x; y \leq \eta \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \rho(\bar{x}, \bar{y})$$

выражает среднюю плотность распределения вероятности в прямоугольнике со сторонами Δx и Δy и площадью $\Delta x \cdot \Delta y$. Если (x, y) — точка непрерывности функции $\rho(x, y)$, то предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq \xi \leq x + \Delta x; y \leq \eta \leq y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow x \\ \bar{y} \rightarrow y}} \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(x, y)$$

действительно выражает плотность распределения вероятности двумерной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$.

Пусть теперь $D \in R_2$ — произвольная квадратируемая область. Найдем вероятность попадания случайной величины ζ в эту область. С этой целью выделим ее элементарную часть $\Delta D \subset D$ с площадью $mes(\Delta D) = dS$. Видимо, вероятность попадания точки ζ в эту область выразится формулой

$$P(\zeta \in \Delta D) = \rho(x, y) dS.$$

Интегрируя последнее равенство по области D , найдем искомую вероятность:

$$P(\zeta \in D) = \iint_D \rho(x, y) dS = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (11.8)$$

Нетрудно заметить, что при определении абсолютной непрерывной двумерной величины можно было использовать равенство (11.8).

Так как $F_\xi(x) = F(x, \infty)$, то из формулы (11.6) следует, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^x \rho_\xi(x) dx, \quad (11.9)$$

где

$$\rho_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy \quad (11.10)$$

плотность распределения случайной величины ξ .

Аналогично убеждаемся, что

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^y \rho_\eta(y) dy, \quad (11.11)$$

где

$$\rho_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx \quad (11.12)$$

плотность распределения уже случайной величины η .

Таким образом, если случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ имеет абсолютно непрерывное распределение, то такие же распределения имеют его компоненты (см. формулы (11.9) и (11.11)).

Пример 11.3. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ и ее компонент, рассмотренной в примере 11.2.

|| Так как ее функция распределения известна и $F(x, y) = xy$, то плотность находим по формуле (11.7): $\rho(x, y) = (xy)''_{xy} = 1$. Для нахождения плотностей компонент воспользуемся формулами (11.10) и (11.12):

$$\rho_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^1 1 dy + \int_1^{\infty} 0 dy = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Аналогично убеждаемся, что $\rho_\eta(y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1$. ||

11.3. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПРИЗНАКИ ИХ НЕЗАВИСИМОСТИ

При рассмотрении совместного распределения случайных величин важное значение приобретает вопрос об их зависимости и независимости.

Определение 11.4. Случайные величины ξ_k , $k = \overline{1, n}$ называются независимыми, если для $\forall x_k \in R$, $k = \overline{1, n}$ независимы по совокупности события

$$(\xi_k < x_k), \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.13)$$

Теорема 11.1. Для того чтобы случайные величины ξ_k , $k = \overline{1, n}$ были независимы, необходимо и достаточно выполнение условия

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdots F_{\xi_n}(x_n). \quad (11.14)$$

|| **Необходимость.** Так как

$$(\xi_k < x_k, k = \overline{1, n}) = \bigcap_{k=1}^n (\xi_k < x_k)$$

и события справа по совокупности независимы, то

$$P(\xi_k < x_k, k = \overline{1, n}) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k < x_k)$$

или

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdots F_{\xi_n}(x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k).$$

Достаточность. Доказательство достаточности очевидно. ||

Во многих вопросах удобнее использовать следующее равносильное определение независимости случайных величин.

Определение 11.5. Случайные величины ξ_k , $k = \overline{1, n}$ называются независимыми, если для любых числовых подмножеств $B_1, B_2, \dots, B_n$ выполняется равенство

$$P(\xi_k \in B_k, k = \overline{1, n}) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \cdots P(\xi_n \in B_n). \quad (11.15)$$

Действительно, если в равенстве (11.15) положить $B_k = (-\infty, x_k)$, то немедленно получим условие (11.14).

Справедливость обратного утверждения проверим для простоты для двумерных случайных величин ξ и η .

Пусть $B_1 = [x_1, x_2]$ и $B_2 = [y_1, y_2]$ — произвольные числовые подмножества, и рассмотрим вероятность $P(\xi_1 \in B_1, \eta \in B_2)$. Для ее преобразования используем равенство (11.5), где предварительно заменим значения совместной функции распределения по формуле (11.14):

$$F(x_i, y_j) = F_{\xi}(x_i) \cdot F_{\eta}(y_j), \quad i, j = 1, 2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) &= F_\xi(x_2) \cdot F_\eta(y_2) - F_\xi(x_1) \cdot F_\eta(y_2) - F_\xi(x_2) \cdot F_\eta(y_1) + \\ &+ F_\xi(x_1) \cdot F_\eta(y_1) = [F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)] \cdot [F_\eta(y_2) - F_\eta(y_1)] = \\ &= P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2). \end{aligned}$$

Условие независимости случайных величин можно выразить и через плотности совместного распределения $\rho(x, y)$ и плотностей $\rho_\xi(x)$, $\rho_\eta(y)$ его компонент.

Теорема 11.2. Для того чтобы случайные величины ξ и η были независимы, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\rho(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y). \quad (11.16)$$

|| Предварительно используя известные плотности, по формулам (6.4) и (11.6) восстановим соответствующие функции распределения:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \rho(x, y) dx dy, \\ F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^x \rho_\xi(x) dx \text{ и } F_\eta(y) = \int_{-\infty}^y \rho_\eta(y) dy. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Достаточность. Интегрируя тождество (11.16) по бесконечному квадранту $B = (-\infty < u < x; -\infty < v < y)$, имеем

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \rho(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^x \rho_\xi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^y \rho_\eta(y) dy.$$

В обозначениях (11.17) последнее равенство запишется в виде

$$F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y), \quad (11.18)$$

что равносильно независимости рассматриваемых случайных величин (см. теорему 11.1).

Необходимость. Так как случайные величины независимы, то выполняется тождество (11.18). Дифференцируя его дважды, в точках непрерывности смешанной производной получим

$$F''_{xy}(x, y) = [F_\xi(x)]'_x \cdot [F_\eta(y)]'_y$$

или

$$\rho(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y). \quad ||$$

Часто приходится изучать суммы независимых абсолютно непрерывных случайных величин и находить их распределения.

Теорема 11.3. Если независимые случайные величины ξ и η абсолютно непрерывны, то их сумма $\xi + \eta$ абсолютно непрерывна с плотностью распределения

$$\rho_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(t) \cdot \rho_{\eta}(z-t) dt. \quad (11.19)$$

|| Предварительно найдем ее функцию распределения:

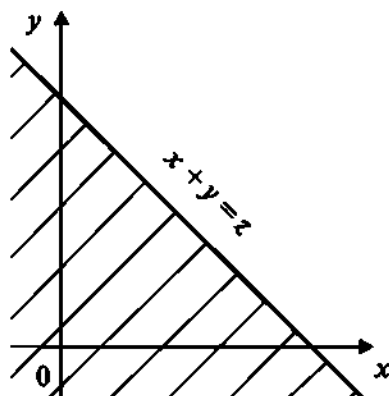


Рис. 11.5

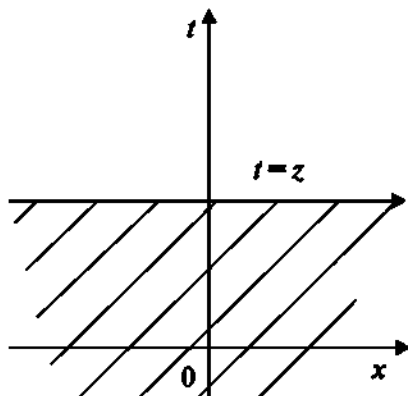


Рис. 11.6

$F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta < z) = P((\xi, \eta) \in B_z)$, где $B_z = \{(x, y) : x + y < z\}$ — полуплоскость, ограниченная прямой $x + y = z$. (На рис. 11.5 она заштрихована). Так как величины ξ и η независимы, то плотность $\rho_{\xi+\eta}(x, y)$ их совместного распределения определяется формулой (11.16): $\rho_{\xi+\eta}(x, y) = \rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y)$. Поэтому согласно формуле (11.6)

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \iint_{B_z} \rho_{\xi+\eta}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{z-x} \rho_{\eta}(y) dy = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{во внутреннем интеграле} \\ \text{сделаем замену } y = t - x; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y = z - x \\ t = z \end{array} \right.; \left\{ \begin{array}{l} y = -\infty \\ t = -\infty \end{array} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^z \rho_{\eta}(t - x) dt = \int_{-\infty}^z dt \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(x) \rho_{\eta}(t - x) dx = \int_{-\infty}^z \rho_{\xi+\eta}(z) dz, \end{aligned}$$

где

$$\rho_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(x) \rho_{\eta}(z - x) dx.$$

Аналогично доказывается справедливость формулы

$$\rho_{\xi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(z - y) \rho_{\eta}(y) dy.$$

На рис. 11.6 изображена полуплоскость интегрирования по переменным t и x .

Пример 11.4. Независимые случайные величины ξ и η имеют соответственно равномерное и показательное распределения:

$$\rho_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 2], \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in [0, 2]; \end{cases} \quad \rho_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ 2e^{-2y}, & \text{если } y \geq 0. \end{cases}$$

Нужно найти плотность распределения их сумм.

|| Искомую плотность находим по формуле (11.19):

$$\rho_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(t) \rho_{\eta}(z-t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \rho_{\eta}(z-t) dt.$$

Для вычисления этого интеграла рассмотрим отдельно три случая:

1) $z \leq 0$. Для таких z $\rho_{\eta}(z-t) \equiv 0$, $t \in (0, 2)$. Поэтому

$$\int_0^2 \rho_{\eta}(z-t) dt = \int_0^2 0 dt = 0.$$

2) $0 < z < 2$. В этом случае

$$\rho_{\eta}(z-t) = \begin{cases} 2e^{-2(z-t)}, & \text{если } 0 < t \leq z; \\ 0, & \text{если } z < t \leq 2. \end{cases}$$

Следовательно, $\int_0^2 \rho_{\eta}(z-t) dt = 2 \int_0^z e^{-2(z-t)} dt + \int_z^2 0 dt = 1 - e^{-2z}$.

3) $z \geq 2$. Тогда $\rho_{\eta}(z-t) = 2e^{-2(z-t)}$, $0 \leq t \leq 2$, и в этом случае

$$\int_0^2 \rho_{\eta}(z-t) dt = 2 \int_0^2 e^{-2(z-t)} dt = e^{-2z} (e^4 - 1).$$

Окончательно имеем

$$\rho_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \leq 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < z < 2; \\ \frac{1}{2} e^{-2z} (e^4 - 1), & \text{если } z \geq 2. \end{cases}$$

11.4. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНЫХ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для простоты изложение проведем для двумерной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$.

Определение 11.6. Математическим ожиданием двумерной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ называется вектор $M\zeta = (M\xi, M\eta)$, где

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_{\xi}(x) dx;$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \rho(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_{\eta}(y) dy.$$

Определение 11.7. Точка $M\zeta = (M\xi, M\eta)$ называется *центром рассеяния* случайной величины ζ .

Определение 11.8. Дисперсией случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ называется вектор $D\zeta = (D\xi, D\eta)$, где $D\xi$ и $D\eta$ определяются по формуле (4.31) или (4.33).

Так как величины $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$ и $\zeta = (\xi, \eta)$ имеют одинаковые распределения, то $\rho_{\xi+\eta}(x, y) = \rho_{\xi\eta}(x, y) = \rho_{\zeta}(x, y) = \rho(x, y)$. Используя эти равенства, покажем, что свойства математического ожидания и дисперсии, справедливые для дискретных случайных величин, сохраняются и для абсолютно непрерывных случайных величин.

Теорема 11.4. Математическое ожидание есть линейный функционал, т.е.

$$M(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha M\xi + \beta M\eta,$$

где ξ и η — абсолютно непрерывные величины с плотностью совместного распределения $\rho_{\zeta}(x, y)$; α и β — некоторые постоянные.

$$\begin{aligned} \prod M(\alpha\xi + \beta\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x + \beta y) \rho(x, y) dx dy = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_{\xi}(x) dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_{\eta}(y) dy = \alpha M\xi + \beta M\eta. \quad \prod \end{aligned}$$

Теорема 11.5. Для независимых абсолютно непрерывных случайных величин ξ и η :

- 1) $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$;
- 2) $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$;
- 3) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

$\prod$ 1) Ввиду независимости случайных величин $\rho(x, y) = \rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y)$ (см. теорему 11.2). Поэтому

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \rho(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_{\eta}(y) dy = M\xi \cdot M\eta.$$

2) Очевидно, вместе с величинами ξ и η будут независимыми и $\xi - M\xi$ и $\eta - M\eta$ (см. замечание §12). Поэтому

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = M(\xi - M\xi) \cdot M(\eta - M\eta) = 0.$$

3) Так как $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ и $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$. $\square$

Пример 11.5. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, рассмотренные в примере 11.4, и $\zeta = (\xi, \eta)$. Требуется найти: 1) $M\zeta$ и $D\zeta$; 2) $M(\xi + \eta)$; $D(\xi + \eta)$; 3) $M(\xi \cdot \eta)$.

$\square$ 1) Сначала находим $M\xi$ и $D\xi$ (как математическое ожидание и дисперсию равномерно распределенной случайной величины (см. формулы § 9):

$$M\xi = \frac{a+b}{2} \bigg|_{a=0}^{b=2} = \frac{0+2}{2} = 1; \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} \bigg|_{a=0}^{b=2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Величина η имеет показательное распределение. Поэтому (см. формулы § 8)

$$M\eta = \frac{1}{\lambda} \bigg|_{\lambda=2} = \frac{1}{2}; \quad D\eta = \frac{1}{\lambda^2} \bigg|_{\lambda=2} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $M\zeta = (M\xi, M\eta) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ и $D\zeta = (D\xi, D\eta) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

2) Так как математическое ожидание линейно (см. теорему 11.4), то $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Для независимых случайных величин и дисперсия линейна. Поэтому $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

3) Для независимых случайных величин $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$. Поэтому $M(\xi \cdot \eta) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. $\square$

11.5. НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 11.9. Двумерная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ имеет нормальное распределение, если ее плотность совместного распределения определяется равенством

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Используя формулы (11.10) и (11.12), легко найти плотности ее составляющих. В частности,

$$\begin{aligned}\rho_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-a_y)^2/2\sigma_y^2} dy = \\ &= \left\{ \frac{y-a_y}{\sigma_y} = t; \quad dy = \sigma_y dt \right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_x} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2}.\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-(y-a_y)^2/2\sigma_y^2}.$$

Таким образом, из полученных представлений плотностей составляющих ξ и η следует, что величины ξ и η распределены нормально с параметрами (a_x, σ_x) и (a_y, σ_y) . Следовательно, $M\zeta = (a_x, a_y)$ и $D\zeta = (\sigma_x^2, \sigma_y^2)$ являются математическим ожиданием и дисперсией нормально распределенного вектора $\zeta = (\xi, \eta)$. Далее так как

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-(y-a_y)^2/2\sigma_y^2},$$

то

$$\rho(x, y) = \rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y).$$

Следовательно, согласно теореме (11.2) составляющие ξ и η независимы.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ задана плотностью распределения

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x \cdot \sin y}{4}, & (x, y) \in B = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq \pi\}; \\ 0, & (x, y) \notin B. \end{cases}$$

1. Построить функцию распределения.
2. Найдя плотности распределения составляющих, показать, что величины ξ и η независимы.
3. Найти плотность $\rho_{\xi+\eta}(z)$.
4. Вычислить $M\zeta$ и $D\zeta$.
5. Найти вероятность того, что случайная точка $\zeta = (\xi, \eta)$ окажется в квадрате $K = \left\{ (x, y): \frac{\pi}{2} \leq x, y \leq 2\pi \right\}$.

11.2. Известна плотность распределения двумерной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in B = \{((x, y): x, y \geq 0, x + y < 1)\}; \\ 0, & (x, y) \notin B. \end{cases}$$

1. Доказать, что составляющие ξ и η зависимы, и найти эту зависимость.

2. Найти $M\xi$, $D\xi$, $\text{cov}(\xi, \eta)$, $r(\xi, \eta)$ и $P(\xi \in K)$, где $K = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}\}$.

11.3. Двумерная нормально распределенная случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ задана плотностью распределения

$$\rho(x, y) = \frac{1}{12\pi} e^{-x^2/8 - (y-1)^2/18}.$$

1. Найти плотность распределения ее составляющих. Показать, что составляющие ξ и η независимы.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ζ .

11.4. Случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ распределена нормально с плотностью, равной

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2 - (y-a_y)^2/2\sigma_y^2}.$$

1. Доказать, что составляющие ξ и η независимы.

2. Показать, что ее функцию распределения можно найти по формуле

$$F(x, y) = \left[0,5 + \Phi\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right) \right] \cdot \left[0,5 + \Phi\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y}\right) \right].$$

3. Пусть $B = \{(x, y): x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$ — некоторый прямоугольник. Проверить справедливость формулы

$$P(\zeta \in B) = \left[\Phi\left(\frac{x_2-a_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a_x}{\sigma_x}\right) \right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{y_2-a_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-a_y}{\sigma_y}\right) \right].$$

11.5. Зная плотность распределения нормально распределенной величины $\zeta = (\xi, \eta)$

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2},$$

найти:

1. $P(\zeta \in B)$, где $B = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1; -2 \leq y \leq 2\}$ — некоторый прямоугольник;

2. $P(\zeta \in K)$, где $K = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ — круг.

11.6. Известна плотность двумерной нормально распределенной величины $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\rho(x, y) = Ce^{-x^2 - 4xy - 5y^2}.$$

1. Найти значение параметра C .

2. Определить плотность распределения составляющих ξ и η и показать, что составляющие есть зависимые случайные величины.

3. Вычислить ковариацию и коэффициент корреляции величин ξ и η .

4. Найти $M\zeta$ и $D\zeta$.

12. НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

12.1. ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $\{\Omega, U, P\}$ — произвольное вероятностное пространство и $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — некоторая случайная величина. Если $f(x)$, $x \in R$ — однозначная функция, то

$$f[\xi(\omega)] = \eta(\omega) \quad (12.1)$$

будет являться суперпозицией функций ξ и f . Как было показано в § 4 (см. пп 4.2 и 4.3), если пространство Ω — дискретное, то в этом случае η представляет некоторую дискретную случайную величину, имеющую то же распределение вероятностей, что и исходная величина ξ . Но в общем случае дела обстоят гораздо сложнее, ибо основное условие

$$(\eta < y) \in U \text{ для } \forall y \in R \quad (12.2)$$

может и не выполняться.

Условие (12.2) заведомо будет выполняться, если функция $f(x)$ является непрерывной функцией (или даже кусочно-непрерывной) для $\forall x \in R$, что и в дальнейшем предполагается выполненным.

Выясним характер распределения случайной величины η в предположении, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $\rho_\xi(x)$.

Теорема 12.1. Пусть $\eta = f(\xi)$, где отображение $y = f(x)$, $x \in R$ взаимно-однозначно, непрерывно дифференцируемо и $f'(x) \neq 0$. Тогда случайная величина η абсолютно непрерывна с плотностью

$$\rho_\eta(y) = \rho_\xi[f^{-1}(y)] \cdot [f^{-1}(y)]'.$$

|| Рассмотрим $\forall B \in R$. Так как события

$$\begin{aligned} (\eta \in B) &= (\xi \in f^{-1}(B)), \text{ то } P(\eta \in B) = P(f(\xi) \in B) = P(\xi \in f^{-1}(B)) = \\ &= \int_{f^{-1}(B)} \rho_\xi(x) dx = \left\{ x = f^{-1}(y), \quad dx = [f^{-1}(y)]' dy \right\} = \\ &= \int_B \rho_\xi[f^{-1}(y)] \cdot [f^{-1}(y)]' dy. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что случайная величина $\eta = f(\xi)$ тоже абсолютно непрерывна с плотностью распределения

$$\rho_{\eta}(y) = \rho_{\xi}[f^{-1}(y)] \cdot [f^{-1}(y)]' \quad \parallel \quad (12.3)$$

Следствие 12.1. Если между абсолютно непрерывными случайными величинами η и ξ существует линейная зависимость, т.е.

$$\eta = \alpha \cdot \xi + \beta,$$

где $\alpha \neq 0$, β — некоторые постоянные, то

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{|\alpha|} \rho_{\xi}\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right). \quad (12.4)$$

$\parallel$ В этом случае $x = f^{-1}(y) = \frac{y-\beta}{\alpha}$. Следовательно, $x' = [f^{-1}(y)]' = \left[\frac{y-\beta}{\alpha}\right]' = \frac{1}{\alpha}$. Поэтому $\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \rho_{\xi}\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$. $\parallel$

Следствие 12.2. Если случайная величина ξ распределена нормально с параметрами (a, σ^2) , то величина $\eta = \alpha \cdot \xi + \beta$, $\alpha \neq 0$ имеет такое же распределение с параметрами $(\alpha \cdot a + \beta, \alpha^2 \sigma^2)$ соответственно.

$\parallel$ Так как случайная величина ξ распределена нормально с параметрами (a, σ^2) , то (см. формулу (10.1))

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

По формуле (12.4) находим и плотность вероятности величины η :

$$\begin{aligned} \rho_{\eta}(y) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}-a\right)^2/2\sigma^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[y-(\alpha a + \beta)]^2/2(\alpha\sigma)^2}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что η распределена тоже нормально с параметрами $(\alpha \cdot a + \beta, \alpha^2 \sigma^2)$. $\parallel$

Теорема 12.2. В условиях теоремы 12.1 для случайной величины η существует ее математическое ожидание, которое можно найти по формуле

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \rho_{\xi}(x) dx.$$

|| По определению

$$\begin{aligned} M\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_{\eta}(y) dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{используя формулу (12.3), плот-} \\ \text{ность } \rho_{\eta}(y) \text{ выражаем через } \rho_{\xi}(x) \end{array} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_{\xi}[f^{-1}(y)] \cdot [f^{-1}(y)]' dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{в полученном интеграле} \\ \text{сделаем замену } y = f(x) \end{array} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \rho_{\xi}(x) dx. \end{aligned}$$

При упрощении последнего интеграла использовались тождества

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, [f^{-1}(y)]' \cdot [f(x)]' \equiv 1. \quad _||$$

Укажем еще одно важное свойство непрерывных отображений.

Теорема 12.3. Однозначные непрерывные отображения переводят независимые случайные величины в независимые.

|| Пусть ξ_1 и ξ_2 — две независимые случайные величины и $\eta_1 = f_1(\xi_1)$ и $\eta_2 = f_2(\xi_2)$, где $f_1(x), f_2(x), x \in R$ — однозначные непрерывные отображения, заданные в R . Покажем, что η_1 и η_2 независимы. С этой целью возьмем произвольные подмножества $B_1, B_2 \subset R$ и рассмотрим вероятность $P(\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2)$. Так как события $(\eta_1 \in B_1; \eta_2 \in B_2) = (f_1(\xi_1) \in B_1; f_2(\xi_2) \in B_2) = (\xi_1 \in f_1^{-1}(B_1); \xi_2 \in f_2^{-1}(B_2))$ и величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$\begin{aligned} P(\eta_1 \in B_1; \eta_2 \in B_2) &= P(\xi_1 \in f_1^{-1}(B_1); \xi_2 \in f_2^{-1}(B_2)) = \\ &= P(\xi_1 \in f_1^{-1}(B_1)) \cdot P(\xi_2 \in f_2^{-1}(B_2)) = P(f_1(\xi_1) \in B_1) \cdot P(f_2(\xi_2) \in B_2) = \\ &= P(\eta_1 \in B_1) \cdot P(\eta_2 \in B_2) \end{aligned}$$

или окончательно

$$P(\eta_1 \in B_1; \eta_2 \in B_2) = P(\eta_1 \in B_1) \cdot P(\eta_2 \in B_2).$$

Последнее равенство доказывает независимость случайных величин η_1 и η_2 (см. определение 11.5). ||

Замечание 12.1. Пусть величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Преобразование $y = x + a$ как линейное непрерывно и однозначно. Поэтому случайные величины $\eta_1 = \xi_1 - M\xi_1$ и $\eta_2 = \xi_2 - M\xi_2$ независимы.

12.2. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$ задана абсолютно непрерывная двумерная случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$, где ее

составляющие $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$ являются зависимыми величинами. Наша ближайшая задача — приблизительно представить одну из составляющих (например, величину η) через линейную комбинацию другой:

$$\eta \approx g(\xi) = \alpha\xi + \beta, \quad (12.5)$$

где неизвестные параметры α и β находят обычно из условия, что аппроксимирующая функция $g(\xi)$ была бы наилучшей в каком-то смысле. Ниже для их отыскания предполагается метод наименьших квадратов: параметры α и β подбирают таким образом, чтобы они доставляли минимум математическому ожиданию $M(\eta - g(\xi))^2$. Тогда найденную функцию $g(\xi) = \alpha\xi + \beta$ называют линейной среднеквадратической регрессией η на ξ . О ее существовании говорит следующая теорема.

Теорема 12.4. Линейная среднеквадратическая регрессия существует и имеет вид

$$g(\xi) = a_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\xi - a_x), \quad (12.6)$$

где $a_x = M\xi$, $a_y = M\eta$, $\sigma_x^2 = D\xi$, $\sigma_y^2 = D\eta$; $r = r(\xi, \eta)$ — корреляционный коэффициент случайных величин ξ и η .

|| Введем вещественную функцию двух переменных α и β

$$G(\alpha, \beta) = M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2$$

и с помощью методов дифференциального исчисления найдем ее точки минимума. Сначала, используя свойство математического ожидания, дисперсии и ковариации, функцию $G(\alpha, \beta)$ приведем к виду

$$G(\alpha, \beta) = \sigma_y^2 + \alpha^2 \sigma_x^2 - 2\alpha r \sigma_x \sigma_y + (a_y - \alpha a_x - \beta)^2.$$

В точках минимума функции $G(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} G'_\alpha(\alpha, \beta) = 2\alpha\sigma_x^2 - 2r\sigma_x\sigma_y = 0, \\ G'_\beta(\alpha, \beta) = -2(a_y - \alpha a_x - \beta) = 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются

$$\alpha = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \beta = a_y - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} a_x,$$

которые функции $G(\alpha, \beta)$ доставляют минимум, равный

$$G_{\min}(\alpha, \beta) = \sigma_y^2 (1 - r^2).$$

Величину $\sigma_y^2(1-r^2)$ называют остаточной дисперсией случайной величины η относительно величины ξ . Она характеризует величину ошибки, которую допускают при замене величины η ее линейной функцией регрессии

$$g(\xi) = a_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\xi - a_x).$$

Нетрудно заметить, что эта ошибка не возникает, если $G_{\min}(\alpha, \beta) = \sigma_y^2(1-r^2) = 0$, т.е. когда коэффициент корреляции $r = \pm 1$, т.е. в этом случае между составляющими η и ξ уже существует линейная зависимость. Объединяя только что полученный результат и свойство 3 коэффициента корреляции (см. формулу (4.39)), мы получим следующее утверждение.

Теорема 12.5. Для того чтобы между абсолютно непрерывными случайными величинами ξ и η существовала линейная зависимость, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициент корреляции по модулю был равен единице, т.е.

$$|r(\xi, \eta)| = 1.$$

Функция линейной регрессии η на ξ (см. формулу (12.6)) порождает одновременно на плоскости Oxy прямую

$$y - a_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - a_x),$$

которая называется прямой среднеквадратической регрессии η на ξ . Ее угловой коэффициент $k_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется коэффициентом регрессии η на ξ .

Аналогично можно построить и функцию линейной среднеквадратической регрессии ξ на η , она имеет вид

$$f(\eta) = a_x + \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (\eta - a_y),$$

и соответственно прямую регрессии ξ на η

$$x - a_x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - a_y),$$

где $k_x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ — коэффициент регрессии ξ на η . В этом случае остаточной дисперсией случайной величины ξ на η является величина $\sigma_x^2(1-r^2)$.

Нетрудно заметить, что обе прямые регрессии пересекаются в точке (a_x, a_y) — центре рассеяния величин ξ и η . Очевидно, эти прямые совпадают, если $r = \pm 1$.

Пример 12.1. Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ задана плотностью распределения

$$\rho(x, y) = \begin{cases} C, & \text{если } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1; \\ 0, & \text{если } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1. \end{cases}$$

1. Найти постоянную C .

2. Показать, что ξ и η являются некоррелированными зависимыми случайными величинами.

3. Найти линейные регрессии каждой случайной величины на другую.

4. Построить прямые среднеквадратической регрессии.

5. Найти их остаточные дисперсии.

|| 1. Так как $\iint_{R_2} \rho(x, y) dx dy = 1$, то $\iint_D C dx dy = 1$, где D — область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Поскольку $mes D = \pi ab$, то $C = 1/(\pi ab)$.

Следовательно,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1/(\pi ab), & \text{если } (x, y) \in D; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

2. По формулам (11.10) и (11.12) найдем плотности распределения составляющих:

$$\rho_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy = \frac{1}{\pi ab} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Аналогично

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{2}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Так как $\rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y) = \frac{4}{\pi^2 a^2 b^2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2} \neq \frac{1}{\pi ab} = \rho(x, y)$, то составляющие ξ и η зависимы (см. теорему 11.2).

Найдем числовые характеристики величин ξ и η .

$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_{\xi}(x) dx = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = 0$ как интеграл от нечетной функции, взятой по симметричному отрезку. По той же причине

$$M\eta = \frac{2}{\pi b^2} \int_{-b}^b y \sqrt{b^2 - y^2} dy = 0.$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \rho_{\xi}(x) dx = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \{x = a \sin t\} = \\ = \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^2}{4}. \text{ Аналогично убеждаемся, что } D\eta = \frac{b^2}{4}.$$

По определению ковариации

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \rho(x, y) dx dy = \\ = \frac{1}{\pi ab} \iint_D xy dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = ar \cos \phi \\ y = br \sin \phi \end{array} ; dx dy = ab r dr d\phi \right\} = \\ = \frac{1}{\pi ab} \frac{(ab)^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\phi d\phi \int_0^1 r^3 dr = 0.$$

Следовательно, $r(\xi, \eta) = 0$, т.е. величины ξ и η — некоррелированы (хотя и зависимы!).

3. Линейные регрессии соответственно имеют вид $g(\xi) \equiv 0$ и $f(\eta) \equiv 0$.

4. Прямые регрессии совпадают с осями координат $y = 0$ и $x = 0$. Они пересекаются в точке $(0, 0)$, которая является центром рассеяния величин ξ и η .

5. Остаточные дисперсии каждой величины ξ и η относительно другой имеют значения $\frac{b^2}{4}$ и $\frac{a^2}{4}$ соответственно. $\parallel$

12.3. УСЛОВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть на вероятностном пространстве задан дискретный двумерный случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ со значениями $z_{ij} = (x_i, y_j)$, где $x_i = \xi(\omega)$, $y_j = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots$

Введем следующие обозначения (здесь сохранены обозначения п. 4.2):

$p_i = P(\xi = x_i) = p(x_i)$ — вероятность того, что составляющая ξ приняла значение x_i ;

$p_j^1 = P(\eta = y_j) = p(y_j)$ — вероятность того, что составляющая η приняла значение y_j ;

$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j) = p(x_i, y_j)$ — вероятность того, что обе составляющие одновременно приняли значения x_i и y_j соответственно;

$p(x_i/y_j)$ — условная вероятность того, что составляющая ξ принимает значение x_i , при условии, что до этого величина η приняла уже значение y_j .

Так как $\sum_{i,j} (\xi = x_i; \eta = y_j) = \Omega$, $\sum_i (\xi = x_i) = \Omega$, $\sum_j (\eta = y_j) = \Omega$, $\sum_j (\xi = x_i; \eta = y_j) = (\xi = x_i)$ и $\sum_i (\xi = x_i; \eta = y_j) = (\eta = y_j)$ и слагаемые в суммах — несовместные события, то, вычисляя вероятность этих событий, получим

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1; \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_j p_j^1 = 1, \quad \sum_j p_{ij} = p_i, \quad \sum_i p_{ij} = p_j^1. \quad (12.7)$$

Используя формулу (2.9), условную вероятность $p(x_i/y_j)$ запишем в виде

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j^1}$$

и рассмотрим эти условные вероятности для различных x_i , $i = 1, 2, \dots$ при фиксированном y_j .

Определение 12.1. Ряд распределения вероятности

$$\frac{p(x_1, y_j)}{p(y_j)}, \frac{p(x_2, y_j)}{p(y_j)}, \dots, \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \dots \quad (12.8)$$

называется условным распределением вероятности случайной величины ξ при условии, что η уже приняла значение y_j .

Определение 12.2. Величина

$$M(\xi/y_j) = \sum_i x_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{1}{p(y_j)} \sum_i x_i p(x_i, y_j) \quad (12.9)$$

называется условным математическим ожиданием величины ξ при условии, что случайная величина η приняла значения y_j . Предполагается, что ряд (12.9) сходится абсолютно для $\forall y_j$.

Ряд (12.8) действительно образует распределение величины ξ , ибо

$$\sum_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{1}{p_j^1} \sum_i p_{ij} = \frac{1}{p_j^1} \cdot p_j^1 = 1.$$

Условное математическое ожидание $M(\xi/y_j)$ зависит от значений случайной величины η , и поэтому его можно рассматривать как новую случайную величину, распределенную так же, как и случайная величина η . Найдем математическое ожидание этой случайной величины:

$$M[M(\xi/y_j)] = \sum_j \left(\frac{1}{p(y_j)} \sum_i x_i p(x_i, y_j) \right) p(y_j) = \\ = \sum_i x_i \sum_j p(x_i, y_j) = \sum_i x_i p(x_i) = M\xi.$$

Аналогично вводится и условное математическое ожидание составляющей η

$$M(\eta/\xi_i) = \sum_j y_j \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{1}{p(x_i)} \sum_j y_j p(x_i, y_j),$$

$i = 1, 2, \dots$ в предположении, что этот ряд сходится абсолютно для $\forall x_i$. Точно так же легко убедиться, что

$$M\eta = M[M(\eta/\xi)].$$

Пример 12.2. Дискретная двумерная случайная величина задана табл. (12.10).

$\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}$	$x_1 = 1$	$x_2 = 0$	$x_3 = -1$
$y_1 = 2$	0,15	0,25	0,2
$y_2 = 4$	0,02	0,3	0,08

(12.10)

Найти: 1) условный закон распределения составляющей ξ при условии, что составляющая η приняла значение $y_2 = 4$; 2) условное и безусловное математические ожидания $M(\xi/\eta = 4)$ и $M\xi$.

|| 1) Используя формулы (12.7), сначала найдем p_2^1 :

$$p_2^1 = p(\eta = 4) = p_{12} + p_{22} + p_{32} = 0,02 + 0,3 + 0,08 = 0,4.$$

А теперь с помощью формулы (12.7) строим ряд распределения составляющей ξ при условии, что η приняла уже значение, равное 4: $\frac{0,02}{0,4}$; $\frac{0,3}{0,4}$; $\frac{0,08}{0,4}$, или 0,05; 0,75; 0,2.

2) Для вычисления условного математического ожидания $M(\xi/\eta = 4)$ воспользуемся формулой (12.9):

$$M(\xi/\eta = 4) = 1 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,75 - 1 \cdot 0,2 = -0,15.$$

3) Используя формулы (12.7), предварительно найдем закон распределения составляющей ξ :

$$p_1 = P(\xi = 1) = p_{11} + p_{12} = 0,15 + 0,02 = 0,17;$$

$$p_2 = P(\xi = 0) = p_{21} + p_{22} = 0,25 + 0,3 = 0,55;$$

$$p_3 = P(\xi = -1) = p_{31} + p_{32} = 0,2 + 0,08 = 0,28.$$

Наконец, по формуле (4.24) вычисляем математическое ожидание $M\xi$:

$$M\xi = 1 \cdot 0,17 + 0 \cdot 0,55 - 1 \cdot 0,28 = -0,11. \quad \text{||}$$

12.4. УСЛОВНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$ задан абсолютно непрерывный случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ с плотностью совместного распределения $\rho(x, y)$. По известному совместному распределению $\rho(x, y)$ вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ легко находятся плотности распределения его составляющих (см. формулы (11.10) и (11.12)):

$$\rho_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy; \quad \rho_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx.$$

Определение 12.3. Условной плотностью $\rho(x/y)$ распределения составляющей ξ называется отношение плотности совместного распределения $\rho(x, y)$ к плотности распределения $\rho_\eta(y)$ его составляющей η , т.е.

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_\eta(y)}. \quad (12.11)$$

Как и в дискретном случае, можно определить условное математическое ожидание составляющей ξ при условии, что составляющая η приняла значение y :

$$M(\xi/\eta = y) = \frac{1}{\rho_\eta(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x, y) dx = g_1(y). \quad (12.12)$$

Конечно, предполагается, что интеграл справа сходится абсолютно. При этом функция $g_1(y)$ называется функцией регрессии ξ на η . Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей η при условии, что фиксируется другая составляющая $\xi = x$

$$\rho(y/x) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_\xi(x)} \quad (12.13)$$

и условное математическое ожидание составляющей η при фиксированном значении $\xi = x$

$$M(\eta/\xi = x) = \frac{1}{\rho_\xi(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y \rho(x, y) dy = g_2(x). \quad (12.14)$$

Здесь функция $g_2(x)$ называется функцией регрессии величины η на ξ .

Интересен случай, когда функции $g_1(y)$ и $g_2(x)$ линейны.

Определение 12.4. Если функции регрессии $g_1(y)$ и $g_2(x)$ линейны, то говорят, что случайные ξ и η связаны линейной корреляционной зависимостью.

Пример 12.3. Двумерный непрерывный случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ задан плотностью распределения

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x, y) \in D \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D \end{cases}, \text{ где } D = \left\{ (x, y) \in R_2 : \begin{matrix} x + y < 1 \\ x, y \geq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Доказать, что составляющие ξ и η связаны линейной корреляционной зависимостью, и найти эту зависимость.

|| По формулам (11.10) и (11.12) сначала найдем плотности распределения вероятности составляющих ξ и η :

$$\rho_\xi(x) = 2 \int_0^{1-x} dy = 2(1-x), 0 \leq x < 1 \text{ и } \rho_\eta(y) = 2 \int_0^{1-y} dx = 2(1-y), 0 \leq y < 1.$$

По теореме (11.2) составляющие ξ и η зависимы, ибо

$$\rho(x, y) = 2 \neq 4(1-x)(1-y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y).$$

Условные плотности составляющих находим по формулам (12.11) и (12.13):

$$\rho(x/y) = \begin{cases} \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}, & \text{если } 0 \leq x < 1-y, 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{если } x > 1-y; \end{cases}$$

$$\rho(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{если } 0 \leq y < 1-x, 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } y > 1-x. \end{cases}$$

По формулам (12.12) и (12.14) вычислим условные математические ожидания составляющих:

$$M(\xi/\eta = y) = \frac{1}{1-y} \int_0^{1-y} x dx = \frac{1-y}{2} = g_1(y), 0 \leq y < 1;$$

$$M(\eta/\xi = x) = \frac{1}{1-x} \int_0^{1-x} y dy = \frac{1-x}{2} = g_2(x), 0 \leq x < 1,$$

т.е. найденные условные математические ожидания являются линейными функциями, следовательно, согласно определению 12.4 вели-

чины ξ и η связаны линейной корреляционной зависимостью. Чтобы найти эту зависимость, предварительно найдем числовые характеристики составляющих ξ и η :

$$M\xi = a_x = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{3}; \quad M\eta = a_y = 2 \int_0^1 y(1-y) dy = \frac{1}{3},$$

т.е. центр рассеяния ξ и η лежит в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

$$D\xi = \sigma_x^2 = 2 \int_0^1 x^2(1-x) dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}; \quad D\eta = \sigma_y^2 = \frac{1}{18};$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} xy dx dy - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{36} \neq 0,$$

т.е. величины ξ и η коррелированы;

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_x \sigma_y} = \left(-\frac{1}{36}\right) : \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = -1,$$

т.е. остаточные дисперсии составляющих равны нулю (ибо $\sigma_y^2(1-r^2) = \sigma_x^2(1-r^2) = 0$), следовательно, между ξ и η существует линейная зависимость: $\eta = g(\xi) = a_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\xi - a_x) = \frac{2}{3} - \xi$ и $\eta = \frac{2}{3} - \xi$ — уравнение линейной среднеквадратической регрессии. $\parallel$

12.5. ОБЩИЙ НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. НОРМАЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Определение 12.5. Двумерный абсолютно непрерывный случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ имеет общее нормальное распределение, если его плотность

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}} \left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r \frac{x-a_x}{\sigma_x} \frac{y-a_y}{\sigma_y} \right] \right\}. \quad (12.15)$$

Мы видим, что общий нормальный закон распределения двумерного случайного вектора определяется пятью параметрами, которые имеют прежний вероятностный смысл: a_x и a_y — математические ожидания; σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсии и r — коэффициент корреляции составляющих ξ и η .

Используя формулу (11.10), найдем плотность распределения составляющей ξ :

$$\begin{aligned}\rho_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y} - r\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2} dy = \left\{ \text{в интеграле сделаем замену:} \right. \\ &\left. \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y} - r\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right) = t; \quad dy = \sigma_y\sqrt{1-r^2} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2},\end{aligned}$$

или

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2}. \quad (12.16)$$

Аналогично убеждаемся, что

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-(y-a_y)^2/2\sigma_y^2}. \quad (12.17)$$

Так как при $r=0$ (т.е. величины ξ и η некоррелированы)

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-(x-a_x)^2/2\sigma_x^2} \cdot e^{-(y-a_y)^2/2\sigma_y^2} = \rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y),$$

то из теоремы 11.2 следует, что случайные величины ξ и η независимы.

Таким образом, для нормально распределенных случайных величин понятия независимости и некоррелированности эквивалентны.

Итак, мы получили доказательство важной теоремы.

Теорема 12.3. Для того чтобы составляющие ξ и η нормально распределенного случайного вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ были независимы, необходимо и достаточно, что они были некоррелированы, т.е. $\text{cov}(\xi, \eta) = r(\xi, \eta) = 0$.

Докажем большее.

Теорема 12.4. Составляющие ξ и η нормально распределенного случайного вектора связаны линейной корреляционной зависимостью.

|| Для того чтобы найти законы условного распределения составляющих ξ и η , разделим обе части равенства (12.15) последовательно сначала на (12.16) и затем на (12.17):

$$\rho(x/y) = \frac{1}{(\sigma_x \sqrt{1-r^2}) \sqrt{2\pi}} e^{-\left\{x - \left[a_x - r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y)\right]\right\}^2 / 2[\sigma_x^2(1-r^2)]};$$

$$\rho(y/x) = \frac{1}{(\sigma_y \sqrt{1-r^2}) \sqrt{2\pi}} e^{-\left\{y - \left[a_y - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x)\right]\right\}^2 / 2[\sigma_y^2(1-r^2)]},$$

откуда следует, что условные распределения составляющих ξ и η тоже нормальны с математическими ожиданиями (функциями регрессии)

$$M(x/y) = a_x - r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y),$$

$$M(y/x) = a_y - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x)$$

и дисперсиями (остаточными дисперсиями) $\sigma_x \sqrt{1-r^2}$ и $\sigma_y \sqrt{1-r^2}$. Так как функции регрессии составляющих ξ и η линейны, то они связаны линейной корреляционной зависимостью. $\parallel$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Закон распределения дискретной двумерной величины задан таблицей. Найти:

1) условный закон распределения составляющей η при условии, что составляющая приняла значение $\xi = 2$;

2) условное и безусловное математические ожидания $M(\eta/\xi = 2)$ и $M\eta$.

$\begin{matrix} \xi & \eta \end{matrix}$	$x_1 = 2$	$x_2 = -4$
$y_1 = 0$	0,2	0,1
$y_2 = 5$	0,04	0,26
$y_3 = 2$	0,16	0,24

12.2. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/8}.$$

Найти закон распределения величины $\eta = 2\xi - 3$.

12.3. Двумерный непрерывный случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ распределен равномерно в области $D = \{(x, y): |x| + |y| < 1\}$.

Найти условные плотности и условные математические ожидания составляющих ξ и η .

12.4. Известна плотность распределения случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 + 2xy - 2y^2}.$$

1. Вычислить ее математическое ожидание и дисперсию.
2. Найдя коэффициент корреляции составляющих ξ и η , показать, что они зависимы.
3. Найти условные плотности и условные математические ожидания составляющих ξ и η .
4. Построить линейные средние квадратические регрессии составляющих ξ и η и вычислить их остаточные дисперсии.
5. Определить коэффициенты и прямые регрессии составляющих ξ и η .

13. ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА

В предыдущем параграфе мы достаточно подробно изучили случайные величины, которые распределены нормально, и обнаружили, что они обладают интересными свойствами, имеющими важное значение в различных приложениях. В частности, мы установили, что конечная сумма независимых нормально распределенных случайных величин тоже имеет нормальное распределение.

Но оказалось, что сумма большого числа слагаемых случайных величин может иметь распределение, близкое к нормальному, хотя и слагаемые не распределены нормально, но удовлетворяют некоторым не очень-то обременительным условиям. Одно из важных условий, которые налагаются на слагаемые, заключается в следующем: слагаемые, будучи независимыми, не должны оказывать сколь-нибудь существенное влияние на всю сумму. В этом и состоит основной вероятностный смысл центральной предельной теоремы А.М. Ляпунова.

Перед тем, чтобы сформулировать теорему Ляпунова, введем следующие обозначения (см. п. 4.6) и определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания $a_k = M\xi_k$ и дисперсии $\sigma_k^2 = D\xi_k \neq 0, \forall k$, $\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $A_n = M\eta_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n^2 = D\eta_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

Тогда нетрудно видеть, что величина

$$\zeta_n = \frac{\eta_n - A_n}{B_n}$$

с функцией распределения $F_n(x) = P(\zeta_n < x)$ нормированна, т.е. $M\zeta_n = 0$ и $D\zeta_n = 1$.

Определение 13.1. Говорят, что нормированная случайная величина ζ_n при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\zeta_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Определение 13.2. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию Ляпунова, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n^{2+\delta}} = 0, \quad (13.1)$$

где $C_n = \sum_{k=1}^n M|\xi_k - a_k|^{2+\delta}$; δ — некоторое положительное число.

Теорема 13.1 (центральная предельная теорема Ляпунова). Если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно независимых величин ξ_n удовлетворяет условию Ляпунова (13.1), то случайная величина

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

асимптотически нормальна при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Доказательство теоремы Ляпунова выходит за рамки возможностей этой книги (ибо требует много дополнительных сведений), поэтому мы ограничимся только ее формулировкой. Доказательство можно найти в книге [4].

А сейчас мы приведем и докажем эту теорему в более ослабленном варианте: в приложениях этого бывает достаточно, чтобы обосновать те или другие утверждения.

Теорема 13.2. Если члены последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ распределены одинаково и имеют абсолютные центральные моменты третьего порядка, то величина

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - na}{n\sigma^2}$$

асимптотически нормальна при $n \rightarrow \infty$, где $M\xi_n = a$, $D\xi_n = \sigma^2$, $\forall n$.

|| По условию теоремы случайные величины ξ_n одинаково распределены. Поэтому

$$M\xi_n = a, D\xi_n = \sigma^2, \mu_3^{(n)} = M|\xi_n - a|^3 = \mu, \forall n.$$

Полагая $\delta=1$, покажем, что для заданной последовательности выполняется условие Ляпунова (13.1), откуда и будет следовать доказательство теоремы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{\left[(n\sigma)^2 + (n\sigma)^2 + \dots + (n\sigma)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu}{\sigma^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Существование математического ожидания и дисперсии следует из теоремы (11.4). ||

А теперь используем эту теорему для обоснования локальной и интегральной теоремы Муавра—Лапласа (см. пп. 3.4 и 3.6). Сохраняя прежние обозначения, напомним некоторые из них:

$$\xi_k = I_k(A) = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ наступило при } k\text{-м испытании;} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ не наступило при } k\text{-м испытании;} \end{cases}$$

$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ — число наступлений события A в n испытаниях;
 $P(A) = p$; $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Как было показано в п. 3.6, индикаторы ξ_k распределены одинаково, причем

$$M\xi_k = p, \quad D\xi_k = pq, \quad \left| \mu_3^{(k)} \right| = |pq(q-p)| \leq 1.$$

Таким образом, для случайной величины η_n — числа наступления события A в n испытаниях — применима предыдущая теорема. Согласно этой теореме η_n при $n \rightarrow \infty$ распределена асимптотически нормально с параметрами $M\eta_n = np$ и $\sigma_n = \sqrt{npq}$. Следовательно, прежде установленные формулы (3.13) и (3.15) являются следствием формулы (13.2), т.е. теоремы Ляпунова.

1.3. Нет. Из $A \setminus B = C$ вытекает лишь, что $A \subset B \cup C$ (рис. 1).

1.4. Нет. Из $A = B \cup C$ вытекает лишь, что $A \setminus B \subset C$ (рис. 2).

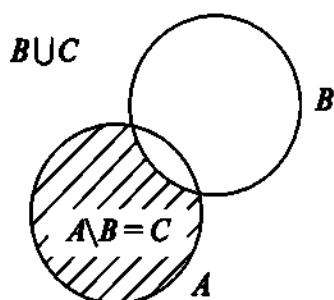


Рис. 1

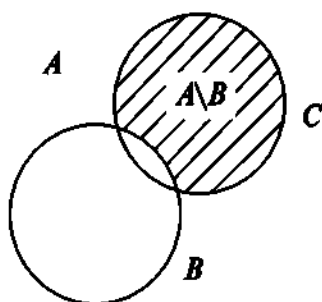


Рис. 2

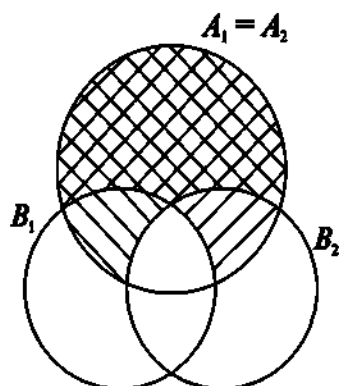


Рис. 3

1.5. Пример приведен на рис. 3. Область, изображающая множество $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$, заштрихована квадратиками, а вся заштрихованная область изображает множество $(A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$. В этом примере $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \neq (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$.

1.7. а) Функция $y = 2x$, $x \in \mathbb{N}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством всех четных положительных и натуральных чисел. в) Любое положительное рациональное число представимо в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $q \in \mathbb{N}$. Сумму $p + q = h$ назовем высотой рационального числа $\frac{p}{q}$ и расположим (перенумеруем) рациональные числа в порядке возрастания их высот, т.е. $0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots$ г) Множество всех рациональных чисел представить как объединение множеств положительных и отрицательных рациональных чисел и воспользоваться результатом задачи 1.8.

1.8. а) Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i — конечные множества. Расположим элементы в объединении A в порядке возрастания индекса i слагаемых, т.е. сначала выписываем элементы множества A_1 , затем A_2 и т.д. б) Пусть $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k = \{b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, b_3^{(k)}, \dots\}$ — счетное множество. С помощью элементов множеств B_k построим бесконечную таблицу 1.

Таблица 1

$b_1^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$b_3^{(1)}$	...
$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	...
$b_1^{(3)}$	$b_2^{(3)}$	$b_3^{(3)}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$b_1^{(n)}$	$b_2^{(n)}$	$b_3^{(n)}$	...

Таблица 2

$C_1^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_3^{(1)}$	...
$C_1^{(2)}$	$C_2^{(2)}$	$C_3^{(2)}$	...
$C_1^{(3)}$	$C_2^{(3)}$	$C_3^{(3)}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Упорядочить элементы в объединении B можно следующим образом: сначала нужно выписать элементы, расположенные в 1-м столбце, затем — во 2-м и т.д. в) Пусть $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где $C_k = \{C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, C_3^{(k)} \dots\}$ — счетное множество. Опять с помощью элементов множеств C_k образуем бесконечную таблицу 2. В этом случае элементы в объединении C располагаем в порядке возрастания высоты $h = i + k$ элементов $C_i^{(k)} \in C: C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}, C_3^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}, \dots$

1.9. а) Так как $A \setminus C$ бесконечно, то из $(A \setminus C)$ выделим правильную счетную часть A_1 . Поскольку $A \sim B$, то существует счетное $B_1 \subset B$, что $A_1 \sim B_1$. Но C и A_1 счетны, поэтому счетно и их объединение $C \cup A_1$ (см. задачу 1.8) и $C \cup A_1 \sim B_1$. Но $(A \setminus A_1) \sim (B \setminus B_1)$. Следовательно, $(A \setminus A_1) \cup (C \cup A_1) \sim (B \setminus B_1) \cup B_1$ или $A \setminus C \sim B$. б) Доказательство следует из результатов предыдущего пункта, ибо $A \sim A$.

1.10. Нужно воспользоваться решением предыдущей задачи 1.9, ибо $(0; 1) = [0; 1] \setminus \{0; 1\}$ и $C = \{0; 1\}$ — конечно.

1.11. На рис. 4 приведено геометрическое решение задачи: точке $(x, y) \in C$ нужно поставить в соответствие точку $N(x, 0) \in (-\infty, \infty)$. Аналитическое решение:

$$X = \frac{2Rx}{2R - y}, \quad (x, y) \in C, \text{ где}$$

$C = \{(x, y) \in R_2 : x^2 + (y - R)^2 = R^2\}$ — заданная окружность.

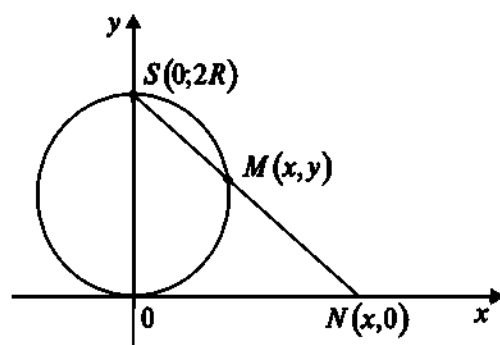


Рис. 4

1.12. 6; 120; 336; 84; 136; 161700.

$$1.13. C_k^m + C_k^{m+1} = \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} = \frac{(k+1)!}{m!(k+1-m)!} = C_{k+1}^m.$$

1.14. $P_4 = 24$.

1.15. $A_5^2 = 20$.

1.16. $C_8^5 = 56$.

1.17. $A_{20}^5 = 1\,860\,480$.

$$1.18. P_2 \cdot P_4 \cdot P_3 = 228.$$

$$1.19. A_{50}^2 = 2450.$$

$$2.3. A = A_1 A_2 A_3; B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3; D = A_1 A_2 A_3; \\ C = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3.$$

$$2.4. A = A_1 \cdot (A_2 + A_3) \cdot A_4; \bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_4.$$

$$2.5. 0,72.$$

$$2.6. 0,5.$$

$$2.7. p = \frac{7 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = 0,25.$$

$$2.8. a) \frac{1}{4}; б) \frac{1}{2}; в) \frac{3}{28}.$$

$$2.9. \frac{mr}{n}.$$

$$2.10. a) \frac{56}{2925}; б) \frac{8}{195}; в) \frac{3}{585}.$$

$$2.11. a) \frac{2}{\pi}; б) \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

$$2.12. \frac{5}{9}.$$

$$2.13. 0,767.$$

$$2.14. 0,12.$$

$$2.15. \approx 0,216.$$

$$2.16. 0,817.$$

$$2.17. 0,936.$$

$$2.18. 0,5.$$

$$2.19. \frac{67}{91}.$$

$$2.20. 0,5472; 0,4528.$$

$$2.21. 0,188; 0,452; 0,336.$$

$$2.22. \frac{115}{203}.$$

$$2.23. \frac{43}{60}.$$

$$2.24. \frac{10}{17}.$$

$$2.25. 0,089.$$

$$3.1. C_7^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^2 \approx 0,1116.$$

$$3.2. P(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = 0,73728.$$

$$3.3. a) P_6(4) = 0,246; б) P_6(6) = 0,26; в) P_6(0) = 0,000064.$$

$$3.4. a) \frac{63}{256}; б) \frac{957}{1024}.$$

$$3.5. P(k \geq 1) = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 0,488.$$

$$3.6. P_{3000}(4) = 0,1339; P_{3000}(0 \leq k \leq 4) = 0,2851.$$

$$3.7. 0,0361.$$

$$3.8. 0,0152.$$

$$3.9. 0,0239.$$

$$3.10. 0,0239; 0,0133.$$

$$3.11. a) 0,738; б) 0,9167.$$

$$3.12. a) P_5(0) + P_5(1) = 0,00046; б) P_5(1 \leq k \leq 6) = 1 - 0,9^5 = 0,40951.$$

$$3.13. 1) 0,1239; 2) a) 0,642; б) 0,4897; в) 0,7404; г) 0,2404; 3) 0,9982.$$

$$3.14. 1) 0,5179; 2) \varepsilon = 0,798, 240 < k < 560.$$

$$3.15. 217 \text{ деталей.}$$

$$3.16. P_3(3) + P_3(2) = C_3^3 \cdot 0,7^3 + C_3^2 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^1 = 0,784.$$

$$3.17. a) P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,9^4 = 0,656,$$

$$б) P_4(4) + P_4(3) = C_4^4 \cdot 0,9^4 + C_4^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1 = 0,948.$$

$$3.18. P(A) = 0,455, P(B) = 0,468, P(C) = 0,181.$$

$$3.19. \varepsilon = 0,01.$$

$$3.20. n = 673.$$

$$4.1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10; \\ 0,2, & 10 < x \leq 20; \\ 0,5, & 20 < x \leq 30; \\ 0,85, & 30 < x \leq 40; \\ 0,95, & 40 < x \leq 50; \\ 1, & x > 50. \end{cases}$$

$$4.2. 1) \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 0,343 & 0,441 & 0,189 & 0,027 \end{array};$$

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,343, & 0 < x \leq 1; \\ 0,784, & 1 < x \leq 2; \\ 0,973, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases} \quad 3) M\xi = 0,9; D\xi = 0,63.$$

$$4.3. \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & 0,0001 & 0,0036 & 0,0486 & 0,2916 & 0,6561 \end{array}; M\xi = 3,6; D\xi = 0,36;$$

$$\sigma(\xi) = 0,6.$$

$$4.4. x_3 = 21; p_3 = 0,2.$$

$$4.5. \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p & 0,01 & 0,077 & 0,23 & 0,346 & 0,259 & 0,078 \end{array}; M\xi = 3; D\xi = 1,2.$$

$$4.6. \sigma(\xi) = 4; n = 100.$$

$$4.7. 1) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \hline p & 0,25 & 0,75 \cdot 0,25 & 0,75^2 \cdot 0,25 & \dots & (0,75)^{n-1} \cdot 0,25 & \dots \end{array};$$

$$M\xi = 4; D\xi = 12;$$

$$2) \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{array}; M\xi = 2,5; D\xi = 1,25.$$

$$4.8. M\xi = 8, D\xi = \frac{16}{11}.$$

$$4.9. 1) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \zeta = \xi + \eta & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p & 0,05 & 0,33 & 0,3 & 0,23 & 0,07 & 0,02 \end{array};$$

$$2) M\xi = 0,7, M\eta = 1,3, M(\xi + \eta) = 2, D\xi = D\eta = 2, D(\xi + \eta) = 1,22.$$

$$4.10. 1) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \zeta = \xi \cdot \eta & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 12 & 18 \\ \hline p & 0,2 & 0,12 & 0,25 & 0,13 & 0,12 & 0,15 & 0,03 \end{array};$$

$$2) M\xi = 2,8; M\eta = 1,9; M(\xi \cdot \eta) = 5,32;$$

$$3) M(\xi(\xi + \eta)) = M(\xi^2) + M(\xi \cdot \eta) = 16,52;$$

$$4) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \frac{\xi + \eta}{2} & 0,5 & 1 & 1,5 & 2 & 2,5 & 3 & 3,5 & 4 & 4,5 \\ \hline p & 0,08 & 0,06 & 0,18 & 0,09 & 0,25 & 0,12 & 0,16 & 0,03 & 0,03 \end{array},$$

$$M\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) = 2,35 = \frac{2,8 + 1,9}{2} = \frac{1}{2}(M\xi + M\eta).$$

$$4.11. 1) a) \begin{array}{c|c|c|c} \xi = \eta & -10 & 70 & 90 \\ \hline p & \frac{9}{10} & \frac{3}{50} & \frac{1}{25} \end{array};$$

$$6) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi + \eta & -20 & 60 & 90 & 140 & 160 & 180 \\ \hline p & \frac{198}{245} & \frac{27}{245} & \frac{18}{245} & \frac{3}{1225} & \frac{6}{1225} & \frac{1}{1225} \end{array};$$

$$2) a) M\xi = M\eta = -\frac{6}{5}; 6) M(\xi + \eta) = -\frac{12}{5};$$

$$3) \text{cov}(\xi, \eta) \approx 14,42, r(\xi, \eta) \approx -0,0204.$$

$$5.2. P(|\xi - M\xi| < 0,2) \geq 0,9.$$

$$5.3. \varepsilon = 0,2.$$

$$5.4. \text{Указание: в неравенстве Чебышева положить } (\xi - M\xi)^2 = \eta.$$

$$5.6. 1) 0,82; 2) a) 0,78; 6) 0,68.$$

$$6.1. 1) a = 1; 2) \rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} 3) P(0,25 < \xi < 0,5) = 0,1875.$$

$$6.2. 1) a = \frac{1}{2}; 2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

$$3) P\left(\frac{\pi}{3} < \xi < \frac{\pi}{6}\right) = 0,25.$$

$$6.3. P(-1 < \xi < 1) = 0,5.$$

$$6.4. 1) a = \frac{2}{\pi}; 2) F(x) = \arctg e^x, x \in R;$$

$$3) P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \arctg e^\beta - \arctg e^\alpha.$$

$$6.5. 1) a = b = 0,5; 2) \rho(x) = 0,5(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}; 3) P(-1 \leq \xi \leq 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$7.1. M\xi = \frac{2}{3}; D\xi = \frac{1}{18}.$$

$$7.2. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases} M\xi = \frac{1}{3}; D\xi = \frac{1}{18}; P\left(\frac{1}{3} < \xi < 2\right) = \frac{4}{9}.$$

$$7.3. a = 1; M\xi = 0,75; D\xi = 0,0375; P(0,5 < \xi < 0,7) = 0,218.$$

$$8.1. 5 \text{ мин.} \quad 8.2. F(5) \approx 0,63. \quad 8.3. F(30) \approx 0,78.$$

$$8.4. 2) a) P(500 \leq T \leq 1000) \approx 0,232; 6) P(T \leq 1000) \approx 0,865;$$

$$b) P(T \geq 750) \approx 0,223.$$

$$9.1. 1) A = \frac{1}{5}; B = \frac{2}{5}; 2) \rho(x) = \frac{1}{5}; 3) P(0 < \xi < 2) = \frac{2}{5}.$$

$$9.2. 1) \rho(x) = \frac{1}{8}; F(x) = \frac{1}{8}(x-2). 2) P(4 \leq \xi \leq 8) = 0,5.$$

$$9.3. F(t) = \begin{cases} 0, & t < a; \\ t-a, & a \leq t \leq a+1; \\ 1, & t > a+1. \end{cases} \quad 9.4. M\xi = 2; D\xi = \frac{4}{3}.$$

$$9.5. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{2\pi}, & 0 \leq x \leq 2\pi; \\ 1, & x > 2\pi. \end{cases} M\xi = \pi; D\xi = \frac{\pi^2}{3}; \sigma(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}};$$

$$P(\pi \leq \xi \leq 2\pi) = 0,5.$$

$$10.1. 1) P(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-(x-20)^2/200}, F(x) = 0,5 + \int_0^{(x-20)/10} e^{-t^2/200} dt;$$

$$2) a) P(10 < \xi < 40) = 0,8185; 6) P(|\xi - 20| < 2) = 0,383.$$

$$10.2. a) P(7,5 < \xi < 8,8) \approx 0,7865; 6) P(|\xi - 8| < 0,8) \approx 0,8904.$$

$$10.3. 1) P(450 < \xi < 600) = P(|\xi - 525| < 75) \approx 0,8664;$$

$$2) P(\xi > 475) = 0,5 + \Phi(1) = 0,8413; 3) P(\xi \leq 625) = \Phi(2) + 0,5 = 0,9772.$$

$$10.4. (28; 36);$$

$$10.5. \approx 1 - (1 - 0,2608)^4 \approx 0,7016.$$

$$11.1. 1) F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - \cos x) \cdot (1 - \cos y), & (x, y) \in B; \\ 0, & (x, y) \notin B \end{cases};$$

$$2) \rho_\xi(x) = \frac{\sin x}{2}, \rho_\eta(y) = \frac{\sin y}{2}. \xi \text{ и } \eta \text{ — независимы.}$$

$$3) \rho_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0; \\ \frac{1}{8}(\sin z - z \cos z), & 0 < z < \pi; \\ -\frac{\pi}{8} \cos z, & z > \pi. \end{cases}$$

$$4) M\zeta = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); D\zeta = \left(\frac{\pi^2}{4} + 4, \frac{\pi^2}{4} + 4\right); 5) P(\zeta \in K) = 0,25.$$

11.2. 1) $\rho_{\xi}(x) = 2(1-x), 0 \leq x < 1; \rho_{\eta}(y) = 2(1-y), 0 \leq y \leq 1;$
 $\rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y) \neq \rho(x, y) \Rightarrow \xi \text{ и } \eta \text{ — зависимы и } \eta = \frac{2}{3} - \xi; 2) M\xi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$
 $D\xi = \left(\frac{1}{18}, \frac{1}{18}\right); \text{cov}(\xi, \eta) = -\frac{1}{36}; r(\xi, \eta) = -1; P(\zeta \in K) = \frac{1}{2}.$

11.3. $\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8}; \rho_{\eta}(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(y-1)^2/8}.$ Так как
 $\rho(x, y) = \rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y),$ то составляющие ξ и η независимы.
 2) $M\zeta = (0; 1), D\zeta(2; 3).$

11.5. 1) $P(\zeta \in B) \approx 0,6515; 2) P(\zeta \in K) \approx 0,8646.$

11.6. 1) $C = \frac{1}{\pi}; 2) \rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} e^{-x^2/5}; \rho_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}.$ Так как
 $\rho(x, y) \neq \rho_{\xi}(x) \cdot \rho_{\eta}(y),$ то ξ и η — зависимы; 3) $\text{cov}(\xi, \eta) = -1;$
 $r(\xi, \eta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}; 4) M\zeta = (0; 0); D\zeta = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right).$

12.1. 1) $\frac{\eta}{P_{\xi=2}(\eta)} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{vmatrix}; 2) M(\eta/\xi=2) = -0,3, M\eta = 0,7.$

12.2. $\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-(y+1)^2/32}.$

12.3. $\rho(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+y)}, & -1 < y \leq 0; \\ \frac{1}{2(1-y)}, & 0 \leq y < 1. \end{cases} M(\xi/\eta=4) \equiv 0.$

$\rho(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{2(x+1)}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{1}{2(1-x)}, & 0 \leq x < 1. \end{cases} M(\eta/\xi=x) \equiv 0.$

$$12.4. 1) M\zeta = (0; 0), \quad D\zeta = \left(1; \frac{1}{4}\right); \quad 2) r(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$3) \quad \rho(y/x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\left(y - \frac{x}{2}\right)^2}; \quad \rho(x/y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}; \quad M(\eta/\xi = x) = \frac{x}{2};$$

$$M(\xi/\eta = y) = y; \quad 0 \leq x, y \leq 1;$$

$$4) \quad \eta \approx g(\xi) = \frac{\xi}{2}; \quad \xi \approx f(\eta) = \eta; \quad \sigma_y^2(1-r^2) = \frac{1}{4}; \quad \sigma_x^2(1-r^2) = \frac{1}{2};$$

$$5) \quad k_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{1}{2} \text{ и } k_x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1; \quad y = \frac{x}{2} \text{ и } x = y.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения функции Пуассона $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

λ m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0001	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
λ m	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005	
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023	
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076	
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189	
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378	
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631	
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901	
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126	
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251	
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251	
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137	
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948	
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729	
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521	
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347	
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217	
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128	
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071	
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037	
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019	
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения функции $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

[illegible]

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3883
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049
1,32	0,4066	1,63	0,4484	1,94	0,4738	2,50	0,4938
1,33	0,4082	1,64	0,4495	1,95	0,4744	2,52	0,4941
1,34	0,4099	1,65	0,4505	1,96	0,4750	2,54	0,4945
1,35	0,4115	1,66	0,4515	1,97	0,4756	2,56	0,4948
1,36	0,4131	1,67	0,4525	1,98	0,4761	2,58	0,4951
1,37	0,4147	1,68	0,4535	1,99	0,4767	2,60	0,4953

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,37	0,4162	1,69	0,4545	2,00	0,4772	2,62	0,4956
1,39	0,4177	1,70	0,4554	2,02	0,4783	2,64	0,4959
1,40	0,4192	1,71	0,4564	2,04	0,4793	2,66	0,4961
1,41	0,4207	1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,68	0,4963
1,42	0,4222	1,73	0,4582	2,08	0,4812	2,70	0,4965
1,43	0,4236	1,74	0,4591	2,10	0,4821	2,72	0,4967
1,44	0,4251	1,75	0,4599	2,12	0,4830	2,74	0,4969
1,45	0,4265	1,76	0,4608	2,14	0,4838	2,76	0,4971
1,46	0,4279	1,77	0,4616	2,16	0,4846	2,78	0,4973
1,47	0,4292	1,78	0,4625	2,18	0,4854	2,80	0,4974
1,48	0,4306	1,79	0,4633	2,20	0,4861	2,82	0,4976
1,49	0,4319	1,80	0,4641	2,22	0,4868	2,84	0,4977
1,50	0,4332	1,81	0,4649	2,24	0,4875	2,86	0,4979
1,51	0,4345	1,82	0,4656	2,26	0,4881	2,88	0,4980
1,52	0,4357	1,83	0,4664	2,28	0,4887	2,90	0,4981
1,53	0,4370	1,84	0,4671	2,30	0,4893	2,92	0,4982
1,54	0,4382	1,85	0,4678	2,32	0,4898	2,94	0,4984
1,55	0,4394	1,86	0,4686	2,34	0,4904	2,96	0,4985
1,56	0,4406	1,87	0,4693	2,36	0,4909	2,98	0,4986
1,57	0,4418	1,88	0,4699	2,38	0,4913	3,00	0,49865
1,58	0,4429	1,89	0,4706	2,40	0,4918	3,20	0,49931
1,59	0,4441	1,90	0,4713	2,42	0,4922	3,40	0,49966
1,60	0,4452	1,91	0,4719	2,44	0,4927	3,60	0,49984
1,61	0,4463	1,92	0,4726	2,46	0,4931	3,80	0,49993
1,62	0,4474	1,93	0,4732	2,48	0,4934	4,00	0,49997

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1997.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1975.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под общ. ред. А.А. Свешникова. 2-е изд. М.: Наука, 1970.
6. Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1990.
7. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. проф. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2002.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. проф. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2002.
9. Математика / Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. М.: ИНФРА-М, 2006.
10. Хуснутдинов Р.Ш. Курс теории вероятностей. Казань: Изд-во КГТУ, 2000.
11. Хуснутдинов Р.Ш. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Казань: Изд-во КГТУ, 2001.
12. Хуснутдинов Р.Ш. Курс математической статистики. Казань: Изд-во КГТУ, 2001.
13. Хуснутдинов Р.Ш. Практикум по курсу теории вероятностей. Казань: Изд-во КГТУ, 2008.
14. Хуснутдинов Р.Ш. Практикум по курсу математической статистики. Казань: Изд-во КГТУ, 2009.
15. Хуснутдинов Р.Ш., Жихарев В.А. Математика для экономистов в примерах и задачах. Ч. 1–3. Казань: Изд-во КГТУ, 2010.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.....	5
1.1. Основные операции над множествами	5
1.2. Эквивалентные множества. Счетные и несчетные множества. Мощность множеств.....	9
1.3. Декартово (прямое) произведение множеств и его мощность.....	12
1.4. Элементы комбинаторного анализа (комбинаторики)	13
1.5. Бином Ньютона	17
1.6. Кольца и алгебра множеств	18
1.7. Аддитивные функции множества	19
Задачи и упражнения	23
2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО	25
2.1. Пространство элементарных событий. Примеры. Случайные события и действия над ними	25
2.2. Понятие вероятности и вероятностного пространства. Примеры. Классическое определение вероятности.....	27
2.3. Геометрические вероятности	32
2.4. Абсолютно непрерывные вероятности	33
2.5. Относительная частота.....	34
2.6. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей	35
2.7. Формула полной вероятности. Формула Байеса	39
2.8. Вероятность наступления хотя бы одного события	41
Задачи и упражнения	43
3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИСПЫТАНИЙ.....	47
3.1. Прямое произведение вероятностных пространств.....	47
3.2. Повторение независимых испытаний	48
3.3. Биномиальная схема. Формула Бернулли	49
3.4. Асимптотические формулы в биномиальной схеме	51
3.5. Полиномиальная схема в последовательности независимых испытаний.....	58
3.6. Последовательность зависимых испытаний	59
Задачи и упражнения	61

4. ДИСКРЕТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	64
4.1. Ряд, многоугольник и функция распределения дискретных случайных величин	64
4.2. Операции над случайными величинами	70
4.3. Математическое ожидание дискретной случайной величины	75
4.4. Дисперсия случайных величин и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин	81
4.5. Центральные и начальные моменты дискретной случайной величины и связь между ними. Теорема о существовании моментов случайных величин	86
4.6. Математическое ожидание и дисперсия суммы одинаково распределенных величин	88
4.7. Числовые характеристики некоторых дискретных случайных величин	88
Задачи и упражнения	95
5. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА И БЕРНУЛЛИ	97
5.1. Неравенство Чебышева	97
5.2. Сходимость последовательности случайных величин по вероятности	97
5.3. Закон больших чисел. Теорема Чебышева	98
5.4. Теорема Бернулли	99
Задачи и упражнения	100
6. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	101
6.1. Абсолютно непрерывные случайные величины. Функция и плотность распределения и их свойства	101
Задачи и упражнения	107
7. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	108
7.1. Математическое ожидание	108
7.2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение	108
Задачи и упражнения	110
8. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	112
8.1. Определение и числовые характеристики показательного распределения	112
8.2. Показательный закон надежности	113
Задачи и упражнения	115
9. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	116
Задачи и упражнения	118
10. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	119
10.1. Определения. Основные характеристики нормального распределения	119
10.2. Вероятность заданного отклонения. Правило трех сигм	121

10.3. Нормальная кривая	122
Задачи и упражнения	124
11. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	126
11.1. Многомерные случайные величины и некоторые их характеристики.....	126
11.2. Абсолютно непрерывные случайные величины	129
11.3. Независимость случайных величин. Признаки их независимости	131
11.4. Основные числовые характеристики многомерных абсолютно непрерывных случайных величин.....	134
11.5. Нормально распределенные двумерные случайные величины	136
Задачи и упражнения	137
12. НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	140
12.1. Функция случайной величины и ее распределение	140
12.2. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.....	142
12.3. Условное распределение дискретных случайных величин	146
12.4. Условный закон распределения непрерывных случайных величин.....	149
12.5. Общий нормальный закон распределения на плоскости. Нормальная корреляция.....	151
Задачи и упражнения	153
13. ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА.....	155
Ответы	158
Приложение 1	166
Приложение 2	167
Приложение 3	169
Список литературы	171

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):

127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, стр. 1

Тел. (495) 380-4260; факс (495) 363-9212

E-mail: books@infra-m.ru

•

Отдел «Книга—почтой»:

тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

Учебное издание

Рашид Шайхеевич Хуснутдинов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебник

Оригинал-макет подготовлен в НИЦ ИНФРА-М

Подписано в печать 25.04.2013.

Формат 60×88/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,78. Уч.-изд. л. 11,81.

Тираж 500 экз. Заказ №

ТК 215900-9944-250413

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»

127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12

E-mail: books@infra-m.ru

<http://www.infra-m.ru>